

Zur numerischen Berechnung von Wirbelstromverlusten in Konstruktionselementen von Induktionsöfen

D i s s e r t a t i o n

**zur Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur (Dr. - Ing.)**

**vorgelegt der Fakultät für Elektrotechnik und
Informationstechnik
der Technischen Universität Ilmenau**

**von Dipl.-Ing. Wolfgang Weigel
geb. am 13. 04. 1965 in Ilmenau**

Berichterstatter: Herr Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. D. Schulze, Technische Universität Ilmenau
Herr Univ.-Prof. Dr.-Ing. B. Nacke, Universität Hannover
Herr Dr.-Ing. W. Andree, ABB Automation Systems GmbH Dortmund

eingereicht am: 28. November 2000

wiss. Aussprache am: 01. November 2002

Verfahrens-Nummer: EI 104

Vorwort

Die Grundlagen für die vorliegende Arbeit entstanden während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Elektrowärme am Institut für elektrische Energiewandlung und Automatisierung der Technischen Universität Ilmenau. Im Fachgebiet Elektrowärme wurden bis Ende 1992 Untersuchungen am BMFT Forschungsprojekt über die „Verbesserung der Energieausnutzung in umweltfreundlichen Induktions-Rinnenöfen durch Optimierung der Schmelzenströmung“ durchgeführt. Ein wesentlicher Bestandteil der BMFT-Forschungsarbeit war die Erhöhung des elektrischen Wirkungsgrades vom Induktions-Rinnenofen durch Reduzierung der Wirbelstromverluste. Dafür waren Untersuchungen zu einem dreidimensionalen numerischen Modell notwendig, das in der vorliegenden Dissertationsschrift vorgestellt wird.

Beenden konnte ich die Arbeit während meiner Tätigkeit als Entwicklungsingenieur bei der Fa. WITTENSTEIN cyber motor GmbH, wo mir meine in Ilmenau gesammelten Erfahrungen über die Finite Elemente Methode bei der Auslegung und Optimierung von hochleistungsfähigen bürstenlosen AC-Servomotoren von Nutzen sind.

Hiermit möchte ich mich insbesondere bei all denjenigen bedanken, die mich fachlich, beruflich und privat beim Gelingen der Arbeit unterstützt haben.

- An erster Stelle bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Schulze für die hervorragende Ausbildung und die Möglichkeit zur Forschungstätigkeit am FG Elektrowärme sowie für die stets präsente kritische Hilfe und fachliche Beratung in den damit verbundenen fruchtbaren Diskussionen sowie für die Übernahme des Hauptreferats.
- Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. B. Nacke und Herrn Dr.-Ing. W. Andree bedanke ich mich für die Übernahme der beiden Korreferate.
- Großer Dank gebührt auch den Mitarbeitern der Unternehmensgruppe WITTENSTEIN, insbesondere Herrn Dr.-Ing. G. Konstas, für das Schaffen von Freiräumen zum Beenden der Dissertationsschrift.
- Bei allen ehemaligen und den noch am FG Elektrowärme verbliebenen Mitarbeitern bedanke ich mich für die kollegiale Unterstützung in stets freundlicher Arbeitsatmosphäre.
- Herrn Dr.-Ing. U. Lüdtke danke ich für die fachliche Beratung im FEM-Bereich und die Unterstützung bei Fragen programmtechnischer Art.
- Den Mitarbeitern am Universitätsrechenzentrum der TU Ilmenau danke ich für die Unterstützung auf rechentechnischem Gebiet.
- Meinen Eltern möchte ich für die frühzeitige Förderung meiner technischen Interessen und die Erziehung zu selbstständiger Arbeit sowie für ihre private Unterstützung danken.
- Meiner Schwester wünsche ich Erfolg für ihr Studium und danke für die private Hilfe.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Wirbelstromverluste in Induktions-Rinnenöfen	3
2.1 Aufbau und Wirkungsweise von Induktions-Rinnenöfen	4
2.2 Maßnahmen zur Reduzierung der Wirbelstromverluste	7
3. Theoretische Grundlagen der Feld- und Wirbelstromberechnung	12
3.1 Beschreibung des elektromagnetischen Feldes von Induktionsöfen	13
3.1.1 Herleitung der feldbeschreibenden Differentialgleichungen in A- φ -Formulierung	14
3.1.2 Zu berücksichtigende Rand- und Symmetriebedingungen	17
3.2 Berechnung der Integralparameter und Verlustleistungen	20
4. Numerische Lösung der Feldgleichungen	22
4.1 Prinzip der Finiten Elemente Methode	23
4.2 Anwendung des Verfahrens von Galerkin	25
4.2.1 Aufstellung des Näherungsansatzes	25
4.2.2 Integralformulierung des Differentialgleichungssystems	27
4.2.3 Aufbau des algebraischen Gleichungssystems	32
4.3 Lösungsverfahren für algebraische Gleichungssysteme	35
5. Numerische Voruntersuchungen	37
5.1 Beschreibung der Modellanordnung	37
5.2 Variantenrechnungen	41
5.2.1 Verfeinerung des Gesamtgitters im Lösungsgebiet	42
5.2.2 Verschiebung des äußeren Randes bei Randbedingung $\vec{A} = 0$ und $\vec{A}_n = 0$	47
5.2.3 Änderung der relativen Permeabilität im Magnetjoch.....	53
6. Berechnung eines realen Rinnenofeninduktors.....	55
6.1 Prinzip des doppelloopigen Rinnenofens	55
6.2 Vorbereitungen zur numerischen Berechnung	56
6.3 Wirbelstromverlustberechnung mit veränderlichen Materialwerten.....	59
6.4 Genauigkeitsbetrachtungen zur numerischen Berechnung der Wirbelstromverluste	66
6.4.1 Fehleranalyse mittels integraler Bilanzen	66
6.4.2 Vergleich von Verlustberechnung und Messung	68
7. Testbeispiel Kühlzylinder-Modell	70
7.1 Beschreibung der Modellanordnung	70
7.2 Dreidimensionale Numerische FEM-Berechnung	71
7.3 Verlustleistungsmessungen am Kühlzylinder-Modell.....	76
7.4 Vergleich zwischen Leistungsmessung und Rechnung.....	77

8.	Lokale Detailuntersuchungen	78
8.1	Reduzierung des Lösungsgebietes auf einen Teilausschnitt	78
8.1.1	Zweidimensionales Untersuchungsbeispiel	81
8.1.2	Ausschnittsberechnung am einloopigen Rinnenofen-Modell	83
8.1.3	Reduzierung des dreidimensionalen Rinnenofen-Lösungsgebietes	88
8.2	Vergleich zur Berechnung im ursprünglichen Lösungsgebiet	89
9.	Zusammenfassung	92
10.	Literatur.....	94

Anhang

A1	Behandlung der Oberflächenintegrale	97
A2	Algebraisches Gleichungssystem	100
A3	Ergebnisse vom Rinnenofenmodell	102
A4	Ergebnisse der Rinnenofenberechnung	113
A5	Formelzeichen und Symbole	121

1. Einleitung

Moderne Verfahren in der Elektrometallurgie wären heute ohne die Anwendung von induktiven Erwärmungsverfahren undenkbar. Grundsätzlich sind alle elektrisch leitfähigen Materialien, wie z.B. Kohle, Graphit, Halbleiter und insbesondere Metalle, induktiv erwärm- und aufschmelzbar. Beim induktiven Erwärmungsvorgang entsteht *Joulesche* Wärme unmittelbar im leitfähigen Einsatzgut. Die Energie wird kontaktlos über ein oszillierendes Magnetfeld von einer Spule abgestrahlt und in das Erwärmungsgut eingekoppelt. Im Erwärmungsgut werden Wirbelströme induziert. Das Gut wird durch die Stromwärmeverluste aufgeheizt.

Bei induktiven Erwärmungsverfahren wird durch die exakte Dosierbarkeit der für die Erwärmung notwendigen Leistung eine hochgenaue Reproduzierbarkeit im Aufheizvorgang erreicht. In Verbindung mit hohen realisierbaren Leistungsdichten ergeben sich geringe Erwärmungszeiten. Beim induktiven Härten mit Hochfrequenz sind z.B. Oberflächenleistungsdichten von bis zu 10^8 W/m² bei extrem hohen Aufheizgeschwindigkeiten von bis zu 10^4 K/s bereits technisch angewendet [RUD89].

In der Gießereibranche wendet man induktiv beheizte Tiegel- und Rinnenöfen zum Schmelzen, Warmhalten und Überhitzen von Eisen- und Nichteisenmetallen seit Jahren erfolgreich an. Der energetisch günstigere Rinnenofen wurde bisher überwiegend als Warmhalteofen eingesetzt. Er ist dabei im "Duplexbetrieb" dem Schmelzaggregat (Kupol- oder Induktionstiegelofen) nachgeschaltet. Das flüssige Schmelzenmaterial wird gesammelt, überhitzt und gleichzeitig homogenisiert. Die Überhitzung der Schmelze kann dabei in kurzer Zeit und mit geringem Energiebedarf erfolgen. Ein Rinnenofen zum Warmhalten von Gußeisen mit 115 t Nutz Fassungsvermögen und einer Nennleistung von 3000 kW gewährleistet beispielsweise einen Überhitzungsdurchsatz von bis zu 87 t/h (für 100 K Überhitzung) bei 1500 °C Gießtemperatur. Die für die Überhitzung notwendige Warmhalteleistung beträgt in dem Fall 390 kW [RWE91].

Der hohe elektrische und thermische Wirkungsgrad macht induktive Rinnenöfen trotz relativ hoher Elektroenergiepreise besonders interessant für das Aufschmelzen von Nichteisenmetallen. Hauptsächlich Kupfer und Zink, deren Legierungen sowie Aluminium lassen sich in Rinnenöfen energieeffizient schmelzen. So kann z.B. mit einem Aluminium-Schmelzofen, der ein Fassungsvermögen von 48 t aufweist, bei einer Anschlußleistung von 3200 kW eine Tagesproduktion von maximal 140 t Aluminium erschmolzen werden [BAA94].

Im direkten Vergleich zum Warmhalteofen werden für das Schmelzen in Rinnenöfen wesentlich höhere Induktorleistungen benötigt. Würde man aber eine Induktoreinheit von einem Warmhalteofen ohne jegliche Veränderung mit vergrößerter Leistung betreiben, so wären höhere Verluste im Induktorgehäuse und Kühlzylinder die unvermeidbare Folge. Es könnten lokale Überhitzungen von Gehäusebauteilen und in Kühlzylinderabschnitten auftreten. Damit verbunden käme es zur drastischen Reduzierung der Lebensdauer dieser überbelastet eingesetzten Rinneninduktoren. Erst durch spezielle konstruktive Maßnahmen und Überarbeitungen zur gezielten Leistungsoptimierung und Verlustreduzierung kann die Gefahr von partiellen Zerstörungen bei Hochleistungs-Rinneninduktoren in Schmelzanwendungen sicher beherrscht werden. Dazu zählen vor allem richtig dimensionierte Kühlzylinder und wirbelstromindämmende Maßnahmen an den Induktorgehäusen.

Unter den dynamischen Marktanforderungen im 21. Jahrhundert kommen langwierige Versuchsreihen sowie der Bau teurer Experimentieröfen zur Entwicklung von Hochleistungsinduktoren praktisch nicht mehr in Frage. Um am Markt erfolgreich zu sein, müssen modernste flexible Konstruktions- und Entwicklungswerkzeuge für die Produktoptimierung eingesetzt werden. Als Voraussetzungen sind die sich gegenwärtig sprunghaft entwickelnde und preiswerte Computertechnik und verschiedene numerische Methoden für die Simulation von mechanischen Belastungen und elektromagnetischen Feldern sowie hochentwickelte Konstruktionssoftware im CAD-Bereich gegeben.

Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist es, dem Ofenkonstrukteur und -entwickler effiziente Hilfsmittel und leistungsfähige Entwicklungswerkzeuge für den Entwurf von Induktionsöfen in die Hand zu geben. Mit diesen Werkzeugen soll der Entwicklungsingenieur Wirbelstromverluste ohne aufwendige und teure Modellversuche in kurzer Zeit a priori berechnen können und die Berechnungsergebnisse nahtlos in die Konstruktion einfließen lassen. Notwendig ist dafür die enge Verknüpfung von CAD-Konstruktion und FEM-Berechnung im mechanischen und elektrischen Bereich.

Spezieller Inhalt der vorliegenden Dissertationsschrift ist die Wirbelstrom- und Verlustberechnung in Induktoreinheiten von Induktionsrinnenöfen.

Am Beispiel eines doppelloopigen Rinnenofens zum Schmelzen von Kupfer werden Ergebnisse der Wirbelstromverlustberechnung vorgestellt. Für alle numerischen Untersuchungen wird die Methode der finiten Elemente FEM angewendet. Aufgrund der komplizierten Ofengeometrie sind die Berechnungen nur im dreidimensionalen Raum sinnvoll durchführbar. Als Voraussetzungen werden sinusförmige Erregung und zeitlich konstante Materialwerte berücksichtigt.

Ausgehend von Wirkungsweise und Aufbau induktiver Rinnenöfen werden die wichtigsten Maßnahmen zur Verringerung von parasitären Wirbelstromverlusten logisch abgeleitet. Die Ergebnisse aus Theorie und numerischer Rechnung sind durch Meßergebnisse am real existierenden Ofen gestützt.

Neben der *Maxwellschen* Theorie für die Formulierung des feldbeschreibenden Differentialgleichungssystems wird das Galerkin-Verfahren zum Aufstellen der numerisch mit dem Computer lösbaren algebraischen Gleichungen angewendet. Anhand von FEM-Voruntersuchungen am vereinfachten Ofenmodell werden Erfahrungen über die benötigte Gitternetzdicke und Ausdehnung für das aktive Feldgebiet gewonnen. Diese gesammelten Erkenntnisse werden anschließend für die Rinnenofenberechnung verallgemeinert und angewendet.

Messungen an einem Versuchsmodell untermauern die Zusammenhänge über Wirbelstromverluste in induktiven Anlagen zusätzlich. Gleichzeitig beweisen die am Modell gewonnenen Meßergebnisse die Tauglichkeit des FEM-Ansatzes für die Verlustberechnung anderer vom Rinnenofen abweichender Induktionsprobleme mit Wirbelstromverlustproblematik.

Durch die in der Arbeit dargelegte Reduzierung des Rinnenofen-Lösungsgebietes auf den für die Wirbelstromverlustbilanz wichtigen Teilausschnitt kann die Rechnung wesentlich vereinfacht werden. Eine erhöhte Detailauflösung ausgewählter Konstruktionselemente wird auf diese Weise für die Rechnung zugänglich.

In der abschließenden Zusammenfassung wird ein Ausblick auf zukünftige Berechnungstechniken und Entwicklungsmethoden in allgemeiner Form gegeben.

2. Wirbelstromverluste in Induktions-Rinnenöfen

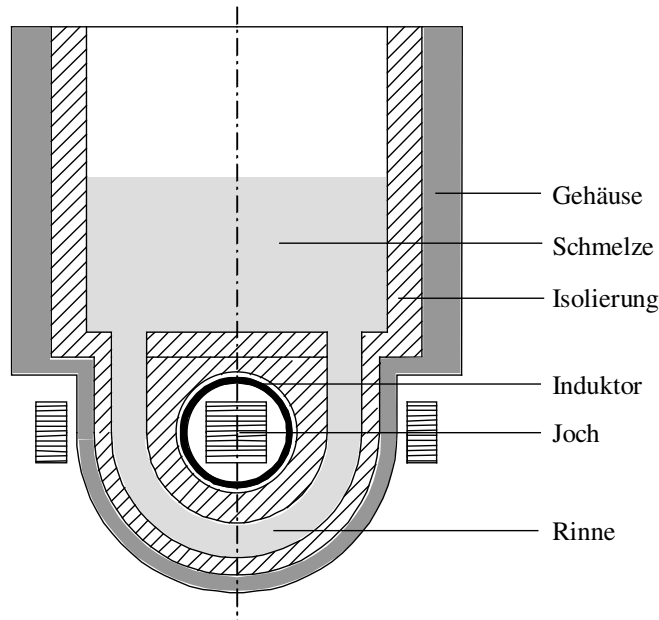
Grundprinzip der Induktionserwärmung ist die auf dem Induktionsgesetz basierende Generierung von Wirbelströmen im zu erwärmenden Einsatzgut. Das von einer mit Wechselstrom gespeisten Spule - dem Induktor - aufgebaute magnetische Wechselfeld dringt in das leitfähige Erwärmungsgut ein. Dort bilden sich durch Induktion periodisch fließende Wirbelströme aus. Diese Ströme sind so gerichtet, daß sie ihrer Ursache - dem zeitlich veränderlichen Magnetfeld - entgegenwirken. Durch das Fließen der Wirbelströme wird im Einsatzmaterial *Joulsche* Wärme erzeugt. Die Energieübertragung in das Einsatzgut erfolgt dabei ohne den direkten Kontakt zwischen Induktor und Gut. Träger der Energie ist das sich periodisch auf- und abbauende magnetische Wechselfeld. In Abhängigkeit von der eingesetzten Frequenz, der realisierten Oberflächenleistungsdichte, den Gutabmessungen und seinen Materialeigenschaften kann das Einsatzgut induktiv erwärmt oder aufgeschmolzen werden.

Das physikalische Prinzip der induktiven Erwärmung beinhaltet zugleich auch die Ursache für einen wesentlichen Nachteil dieser Erwärmungsmethode. Denn Induktionserwärmungsanlagen bestehen neben dem elektrisch leitenden Schmelzen- oder Erwärmungsmaterial konstruktiv bedingt auch aus einer Reihe von Bauteilen, die ebenfalls elektrische Leitfähigkeit aufweisen. Infolge von nicht vollständig vermeidbaren Feldstreuungen unterliegen auch diese Konstruktionsteile dem Einfluß des elektromagnetischen Wechselfeldes. Daraus folgt, daß außer im Einsatzmaterial auch in den leitfähigen Konstruktionsteilen von Induktionserwärmungseinrichtungen Wirbelströme induziert werden. Durch das Fließen dieser unerwünscht induzierten Ströme wird auch in den Konstruktionselementen Energie in Wärme umgewandelt. Damit geht diese Energie aber für den eigentlichen Erwärmungsprozeß des Gutes verloren. Es resultieren Energieverluste, welche den Gesamtwirkungsgrad der Erwärmungs- oder Schmelzanlage negativ beeinflussen. Ziel für die optimale Auslegung einer induktiven Erwärmungseinrichtung muß daher sein, die Energieverluste durch geeignete konstruktive Maßnahmen so gering wie möglich zu halten. Die induzierten Wirbelströme sind in ihrem Wirken zu begrenzen, abzdämmen oder in ihrem Entstehen zu vermeiden.

Am Beispiel eines Induktions-Rinnenofens wird nachfolgend erläutert und aufgezeigt, wo und in welchen Konstruktionsteilen Wirbelstromverluste auftreten und auf welche Art und Weise diese verringert werden können. Dabei werden die verschiedenen Grundtypen von Induktionsrinnenöfen kurz erläutert und die Funktion der Hauptkonstruktionsteile beschrieben. Einzelne Anwendungs- und Einsatzgebiete von induktiv beheizten Rinnenöfen im Gießereibetrieb werden im Überblick erwähnt.

2.1 Aufbau und Wirkungsweise von Induktions-Rinnenöfen

Nach dem Grundprinzip der induktiven Erwärmung mit Eisenkern kann der Induktions-Rinnenofen IRO als Netzfrequenztransformator aufgefaßt werden. Die um einen geblechten Trafokern gewickelte N-windige Primärspule, der sogenannte Induktor, wird von niederfrequentem Wechselstrom gespeist. Dadurch wird ein magnetischer Wechselfluß im Kern aufgebaut.



Die kurzgeschlossene Sekundärwicklung des Trafos wird von der Rinne mit dem flüssigen Metall gebildet. Durch das magnetische Wechselfeld wird in der Rinne ein Kurzschlußstrom hervorgerufen, der zur Erwärmung des Schmelzenmaterials führt. Die Bezeichnung "Rinnenofen" resultiert somit aus der charakteristischen Bauform dieses Induktionsofentyps, wie er in Bild 2.1 gezeigt wird.

Bild 2.1: Prinzipaufbau eines Induktions-Rinnenofens

Im Gegensatz zum Induktionstiegelofen in Bild 2.2, bei dem der gesamte mit Schmelze gefüllte Tiegel von der Spule umschlossen ist, wird beim Rinnenofen nur der unter dem Ofengefaß befindliche Teil der Schmelze dem elektromagnetischen Wechselfeld ausgesetzt.

Damit erfolgt die induktive Erwärmung der Schmelze auch nur in der Schmelzrinne. Die in der Rinne erzeugte *Joulesche* Wärme wird erst durch die infolge elektromagnetischer und thermischer Auftriebskräfte hervorgerufene Strömung auf die Restschmelze übertragen. Die Energieübertragung auf die heiße, flüssige Schmelze im Ofengefaß und die eventuell darin noch enthaltenen festen Bestandteile erfolgt somit indirekt. Es ergibt sich das Problem des Wärmetransports von der Rinne in den Schmelzbehälter.

Als Schmelzenbehälter oder Ofengefaß wird bei den heute üblichen Induktions-Rinnenöfen meist ein rippenversteiftes Stahlblechgefäß in Wannenform bzw. ein Tiegel, wie in Bild 2.3, verwendet.

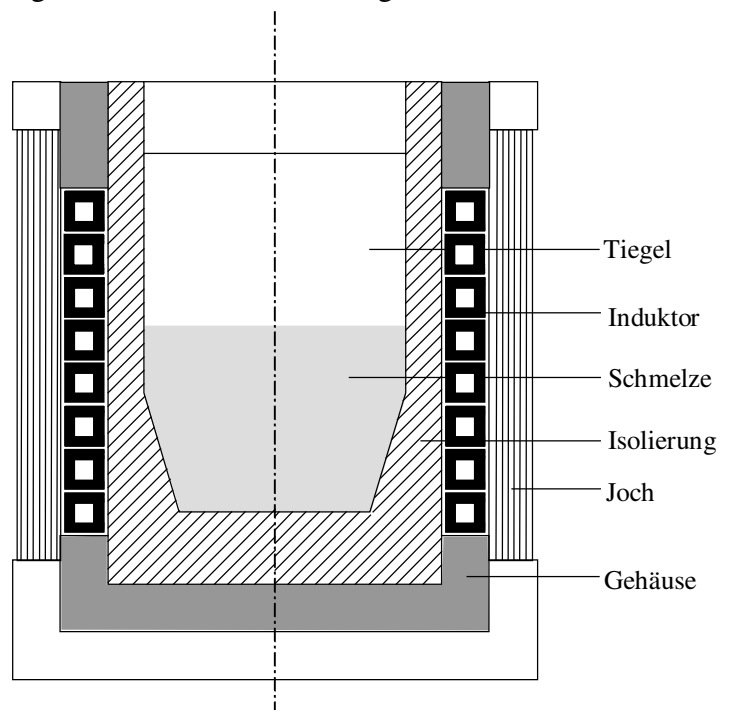


Bild 2.2: Prinzipaufbau vom Induktions-Tiegelofen

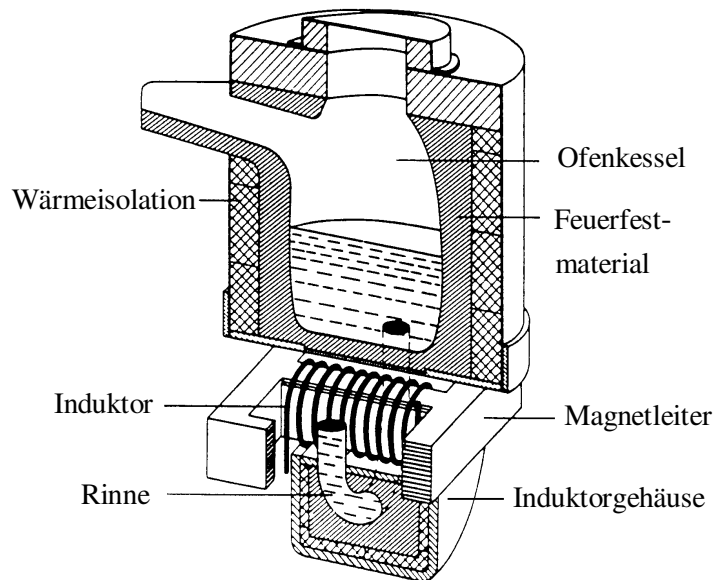


Bild 2.3: Aufbau einloopiger Rinnenofen [RWE91]

diese wassergekühlt oder seltener auch luftgekühlt ausgeführt. Zum Schutz der Induktorspule vor einem Rinnendurchbruch befindet sich um die Spule herum ein wassergekühltes Blech aus Kupfer oder unmagnetischem Stahl - der Kühlmantel oder Kühlzylinder. Dieser Kühlmantel erfüllt neben der Schutz- und Kühlfunktion gleichzeitig noch die Aufgabe, die Feuerfestausmauerung gegenüber dem Induktor abzustützen. Zur Verhinderung der Ausbildung von geschlossenen Ringströmen ist der Kühlzylinder durch einen Schlitz über die gesamte Kühlzylindertiefe unterbrochen. Um den Induktor, Kühlzylinder und die Rinne herum liegt als äußerer Abschluß der Induktoreinheit das Induktorgehäuse. Bei Induktoren höherer Leistung ist dieses üblicherweise aus Stahl hergestellte Gehäuse auch wassergekühlt ausgeführt. Das Induktorgehäuse dient im wesentlichen zur Stützung der Feuerfestauskleidung, die aus Flüssigmasse gegossen oder als trockene Stampfmasse eingebracht wird. Um Rißbildungen in der Zustellung zu verhindern, ist das Induktorgehäuse äußerst massiv ausgelegt.

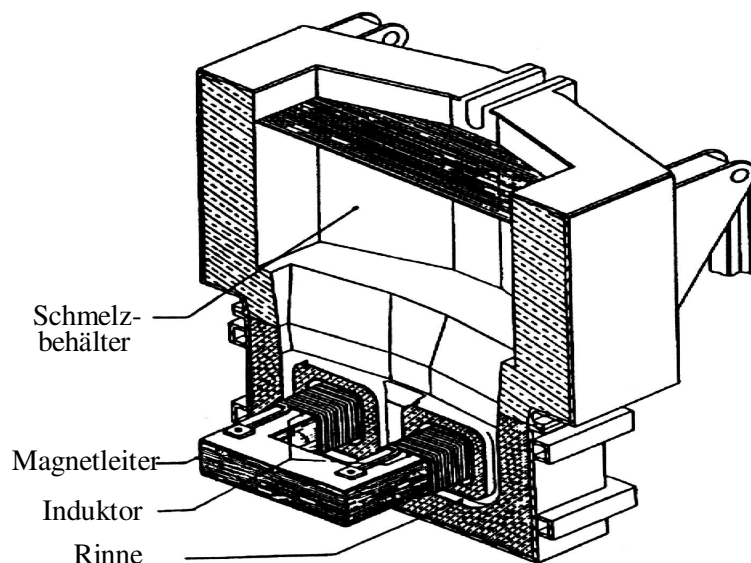


Bild 2.4: Prinzipaufbau doppelloopiger Rinnenofen [BMFT92]

Das Ofengefäß ist auf der Innenseite zum Schutz vor der heißen Schmelze mit einer Feuerfestauskleidung versehen. Außen um das Feuerfestmaterial herum liegt eine wärmeisolierende Schicht, die Wärmeverluste über die Oberfläche vermindert. Die Induktionsrinne des Ofens stellt einen U-förmigen schmelzengefüllten Kanal dar, dessen beide Schenkel an der Unterseite des Ofenkessels einmünden. Der durch die so entstandene Rinnenöse hindurchragende Arm des aus einzeln übereinandergeschichteten Blechlamellen bestehenden Eisenkerns trägt die mehrwindige Induktionsspule - den Induktor. Um die in der Spule entstehenden Wärmeverluste abzuführen ist

Bei doppelloopigen Rinnenöfen, siehe Bild 2.4, ist das Gehäuse im Bereich zwischen den beiden Induktoren zur Begrenzung von hohen Wirbelströmen geschlitzt.

Für Hochleistungsinduktoren zum Schmelzen können, wie in Abschnitt 2.2 erläutert, Gehäusematerialien mit geringer elektrischer Leitfähigkeit eingesetzt oder andere konstruktive Maßnahmen zur Eindämmung von Wirbelstromverlusten angewendet werden.

Induktions-Rinnenöfen werden fast ausschließlich bei Netzfrequenz betrieben, da ein Betrieb bei höheren Frequenzen keine Vorteile hinsichtlich des Erwärmungsprozesses bei diesen Öfen bewirkt. Der Netzanschluß von Rinnenöfen kann somit in der Regel über einen Niederspannungs- oder alternativ über einen Hochspannungstransformator erfolgen.

Die vorangehend beschriebene und in Bild 2.1 und 2.3 gezeigte einloopige Bauform des Induktions-Rinnenofens wird in der Eisenindustrie vorwiegend als Speicherofen eingesetzt. Dabei wird der Rinnenofen im Duplexbetrieb dem eigentlichen Schmelzaggregat einem Kupol- oder Tiegelofen nachgeschaltet. Er dient dann als Puffer zum Speichern, Warmhalten, Überhitzen und Homogenisieren des Schmelzenmaterials für das nachfolgende Gießen.

Das Überhitzen von flüssigem Gußeisen bei 100 K Temperaturerhöhung kann im Rinnenofen von 135 t Nutzfassungsvermögen und einer Ofenleistung von 4200 kW mit einem maximalen Überhitzungsdurchsatz von bis zu 110 t / h erfolgen [MÜHL92].

Einloopige Rinnenöfen werden bis zu einem Fassungsvermögen von 50 t mit einem wannenförmigen Ofengefäß versehen. Bei größeren Ofeninhalten bis zu 125 t sind jedoch tiegelförmige Ofengefäße in Anwendung [MÜHL92]. Induktions-Rinnenöfen der einloopigen Bauart werden bis zu einer Leistung von 3000 kW eingesetzt [BMFT92].

Neben der Ausführung als Speicheröfen werden Rinnenöfen auch als Gießöfen konstruiert. Sie finden dann Anwendung im automatischen Gießprozeß, wie zum Beispiel als Druckgießöfen mit gasdichtem Ofenkessel. Gießöfen dienen zunächst dem Speichern und der Temperaturvergleichsmäßigung in der Schmelze. Das schlackefreie Gießen erfolgt dann mit hoher Temperaturgenauigkeit. Eingesetzt werden Gießöfen mit ca. 1 t bis 25 t Fassungsvermögen und von 70 kW bis 500 kW Nennleistung [RWE91]. Eine programmierbare geregelte Dosierung und die Anpassung der Abgießgeschwindigkeit an das Aufnahmevermögen der Formen einer taktenden oder kontinuierlich betriebenen Formstrecke ist möglich.

In zunehmendem Maße werden Induktions-Rinnenöfen auch in der Nichteisenindustrie als Schmelzöfen eingesetzt. Dort werden sie für die Herstellung von Kupfer, Aluminium, Zink und deren Legierungen eingesetzt, insbesondere wo kleinere Leistungsdichten bei großem Ofenfassungsvermögen benötigt werden. Die spezifischen Leistungen liegen bei Schmelzöfen etwa 10fach höher im Vergleich zu Speicheröfen. Bei Schmelzöfen kleinerer Leistung, die in Kesselform gebaut werden, ist nur eine Induktoreinheit unten am Ofengefäß angeflanscht. Für Schmelzöfen kommen dabei meist doppelloopige Induktoren, wie in Bild 2.4 zu sehen, zum Einsatz. Diese ermöglichen gegenüber einloopigen Induktoren höhere spezifische Leistungsdichten bei nur geringfügig größerem Bauvolumen. Für Rinnenöfen zum Schmelzen mit größerer Leistung werden trommelförmige Ofengefäße mit ein bis vier und maximal sechs Induktoren, die gleichzeitig am Gefäß angeflanscht sind, verwendet. Gebaut werden Schmelzöfen zwischen 0,3 t und 150 t Fassungsvermögen und Ofenleistungen zwischen 40 kW und 3200 kW [MÜHL92].

Da die Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme beim Rinnenofen im wesentlichen in der Rinne erfolgt, stellen sich dort extrem hohe Leistungsdichten bezogen auf die Schmelzenoberfläche und das Schmelzenvolumen in der Rinne ein. Ohne den ausreichenden Wärmetransport in der Schmelzrinne würde diese innerhalb kurzer Zeit durch thermische Überhitzung zerstört werden.

Es kann jedoch nur eine geringe Wärmemenge durch direkte Wärmeleitung von der Rinne in die Schmelze transportiert werden. Die Ursachen liegen in der Rinnengeometrie und in den physikalischen Eigenschaften der Metallschmelze. Einen ausreichenden Wärmetransport können nur konvektive Wärmeübertragungsmechanismen gewährleisten.

Der Wärmetransport wird nach heutigem Wissensstand, wie die Untersuchungen zum BMFT-Projekt zwischen der ABB Industrietechnik AG Dortmund, dem Institut für Elektrowärme der Universität Hannover und dem Fachgebiet Elektrowärme der TU Ilmenau ergaben, durch Wärmeübertragungseffekte infolge des stark turbulenten Schmelzenverhaltens im Rinnenkanal bestimmt. Hinzu kommen unterstützende thermische Auftriebseffekte durch den in der Rinne vorhandenen Temperaturgradienten [BMFT92].

Entgegen früheren Annahmen kann die Transitströmung im Rinnenkanal keine für den Wärmetransport ausreichenden Geschwindigkeitskomponenten annehmen. Die Transitströmung wirkt nur unterstützend auf die anderen entscheidenden Effekte ein. Beim einphasigen Induktorbetrieb ergibt sich die Transitströmung als Sekundäreffekt der lokalen Primärströmungen unterschiedlicher Intensität entlang der Rinnenform. Starke lokale Strömungsbewegungen treten vor allem am Übergang der Rinne in den Ofenhals auf. Die dort resultierenden Strömungsgeschwindigkeiten liegen um ein Vielfaches höher als die Geschwindigkeit der Transitströmung [NACK92].

Hohe lokale Strömungsgeschwindigkeiten führen aber unter bestimmten Voraussetzungen zur Ansatzbildung in der Rinne oder zu verstärkter Erosion an der Rinnenzustellung. Das Ziel von Maßnahmen zur Optimierung des Strömungsverhaltens sollte daher die Verminderung dieser starken lokalen Strömungen im Rinnenkanal sein. Dieses Thema ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit, die sich mit der Optimierung von Rinnenöfen hinsichtlich der Wirbelstromverluste beschäftigt, und kann in der dazu vorliegenden Literatur eingesehen werden [FRICK90], [WALT92], [BMFT92], [ABB93].

2.2 Maßnahmen zur Reduzierung der Wirbelstromverluste

Aufgrund des geschlossenen Eisenkreises liegt der Wirkungsgrad bei Induktions-Rinnenöfen im Vergleich zu Tiegelöfen um bis zu 20 % höher. Dadurch wird der Einsatz von Rinnenöfen als Schmelzaggregat immer interessanter. Besonders im Nichteisen-Metall-Bereich setzt man daher auch verstärkt Rinnenöfen zum Schmelzen ein.

Im Schmelzbetrieb liegen die erforderlichen Induktorleistungen gegenüber den anderen Hauptanwendungen Speicherofen und Gießofen, wie im Abschnitt 2.1 erläutert, wesentlich höher. Bei Schmelzinduktoren können dadurch in Abhängigkeit vom Schmelzenmaterial sowohl Auswaschungseffekte als auch verstärkt Ansatzbildungen im Induktorkanal auftreten. Die Ursachen für diese Effekte liegen neben den auf die Schmelze einwirkenden elektromagnetischen Kräften, in der Schmelzenströmung im Rinnenkanal und dem davon abhängigen Wärmetransport. Weitere Einflußfaktoren sind die Schmelzentemperatur sowie das verwendete Feuerfestmaterial. Alle diese genannten Einflußgrößen müssen bei der optimalen Auslegung des Induktorkanals berücksichtigt werden. Es sind somit spezielle konstruktive und technologische Maßnahmen für den Bau und beim Betrieb von Induktions-Rinnenöfen notwendig.

Besondere Beachtung für die optimale Auslegung der Induktoreinheit von Rinnenschmelzöfen verlangt aufgrund der zum Schmelzen höheren Induktorleistungen aber auch die Reduzierung der Wirbelstromverluste, die einen wesentlichen Anteil der elektrischen Verluste des Rinnenofens bilden.

In Bild 2.5 ist als Beispiel für die Verlustverteilung im Induktions-Rinnenofen das Energieflußdiagramm eines Rinnenofens zum Schmelzen von Zink abgebildet. Erkennbar wird, daß die Induktorverluste mit ca. 8 % der Gesamtverluste den größten Anteil der Verluste beim Rinnenofen tragen. Während insgesamt nur etwa 6,5 % durch Wärmeleitung, Strahlung, die Ofenform und durch Abgase getragen werden.

Den überwiegenden Teil der Induktorverluste bilden neben den thermischen Verlusten die elektrischen Verluste mit ca. 6 % Verlustanteil an den Induktor-Gesamtverlusten.

Hervorgerufen werden die elektrischen Gesamtverluste neben den Verlusten im Magnetleiter vor allem von den Spulenverlusten, den elektrischen Verlusten im Induktorgehäuse und den Kühlzylinderverlusten. Die elektrischen Verluste entstehen durch die Induktion von unerwünschten oder parasitären Wirbelströmen in den leitfähigen Bauteilen Kühlzylinder und Induktorgehäuse. Diese Konstruktionsteile sind dem magnetischen Wechselfeld direkt oder Streuanteilen des Wechselfeldes ausgesetzt. Dadurch kommt es zur unerwünschten Erwärmung und zu Verlusten in diesen Bauteilen.

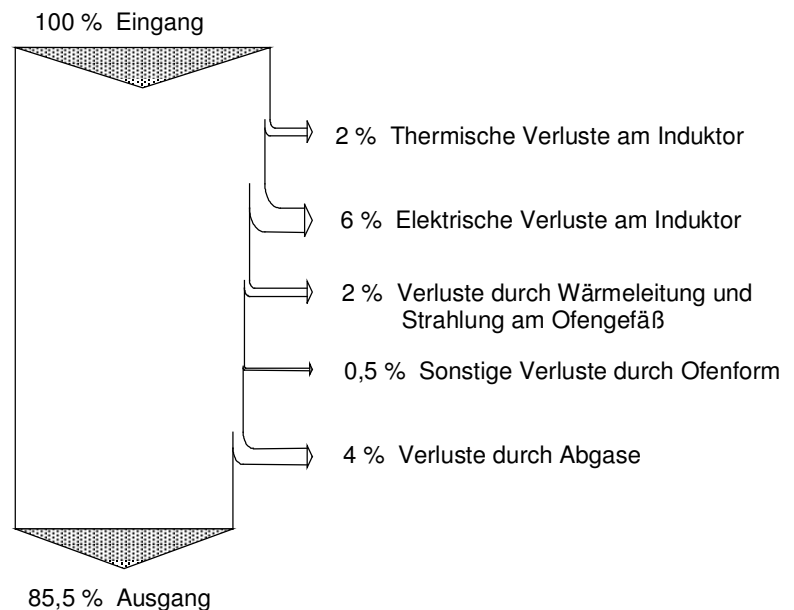


Bild 2.5: Energiefluß beim Induktionsrinnenofen
[MÜHL92]

Für einen Rinnenofen zum Schmelzen von Zink oder einer Kupferlegierung liegen nach den Ausführungen in [WSEW92] die Kühlzylinderverluste zwischen 1 ... 2 % und die Verluste im Induktorgehäuse im Bereich von 3 ... 5 % der elektrischen Gesamtverluste der Induktoreinheit. Somit ergibt sich ein elektrischer Gesamtwirkungsgrad zwischen 85 ... 93 % für diese Bauart von Rinnenschmelzöfen.

Nicht zu vernachlässigen sind die gegenüber den elektrischen Verlusten kleineren thermischen Verluste der Induktoreinheit. Thermische Verluste entstehen infolge von Wärmeströmen zwischen der heißen Schmelze und dem wassergekühlten Induktorgehäuse sowie dem Kühlzylinder. Die Wärmeströme verlaufen somit entlang dem Temperaturgradienten in der Feuerfestzustellung des Induktorgehäuses und sind abhängig von der Schmelzentemperatur und der Gehäusetemperatur. Aufgrund annähernd gleicher Temperaturen von Kühlmantel und Induktor, die sich räumlich sehr dicht beieinander befinden, tritt kein nennenswerter Wärmestrom zwischen beiden Bauteilen auf.

Für Kupferschmelzöfen liegen die thermischen Verluste je nach Ausführung zwischen 1,5 ... 2 % der Gesamtinduktorverluste. Der Gesamtwirkungsgrad liegt bei Induktoren für Kupferlegierungen zwischen 80 ... 90 % [WSEW92] .

Durch die Reduzierung der elektrischen Verluste und vor allem der Kühlzylinder- und Induktorgehäuseverluste kann eine bessere Energieausnutzung bei Induktions-Rinnenöfen erzielt werden. Das gelingt nur durch die optimale Auslegung der Ofenkonstruktionselemente in bezug auf minimale Wirbelstromverluste.

Für die Verringerung der Wirbelstromverluste in den Bauteilen und die Erhöhung des elektrischen Wirkungsgrades von Induktions-Rinnenöfen sind eine Reihe von konstruktiven Maßnahmen möglich. Dabei sind eine Vielzahl unterschiedlicher Parameter und Einflußgrößen auf die Verluste im jeweiligen Konstruktionselement des Ofens und die Auswirkungen auf andere Ofenbauteile zu berücksichtigen.

So führt die Verringerung des Rinnenquerschnittes direkt zu einer Erhöhung des elektrischen Wirkungsgrades. Der Reduzierung des Querschnittes sind aber Grenzen gesetzt durch die elektromagnetischen Einschnürungskräfte (Pinch-Effekt), das Problem des erforderlichen Wärmetransports von der Rinne in den Schmelzbehälter und auch durch metallurgische Aspekte (Metallverdampfen). Eine bestimmte untere Grenze des Rinnenquerschnittes muß daher unbedingt eingehalten werden.

Die im Kühlzylinder auftretenden elektrischen Verluste können durch die Verringerung der Blechdicke reduziert werden. Dabei ist die für den Erhalt der mechanischen Festigkeit des Kühlzylinders unbedingt notwendige Dicke einzuhalten. Eine Alternative für die Reduzierung der Kühlzylinderverluste ist die Verwendung eines anderen Blechmaterials mit geringerer elektrischer Leitfähigkeit. Insgesamt gesehen bildet das Verhältnis von Blechdicke zu Eindringtiefe den Einflußparameter für die Größe der entstehenden Wirbelstromverluste im Kühlzylinder. Berücksichtigt werden muß, daß das verwendete Kühlzylindermaterial das um den Kühlzylinder herum und im Kühlzylinder entstehende magnetische Wechselfeld stark beeinflusst. Dieses Feld wird ausgehend von der Spule in Wechselwirkung zwischen Spule, Magnetleiter, Kühlzylinder und Gehäuse aufgebaut. Kupfer als Material für den Kühlzylinder ruft eine Verdrängung des Feldes hervor. Demgegenüber bewirkt weniger gut leitendes Material, d.h. geringer elektrisch leitend im Vergleich zu Kupfer, kaum eine Feldverdrängung [WSEW92].

Einen erheblichen Einfluß auf die Höhe der im Induktorgehäuse induzierten Wirbelstromverluste haben die Gehäuseabmessungen allgemein. Insbesondere spielt dabei der Abstand zwischen Rinne und Gehäuse eine entscheidende Rolle. Je weiter das Gehäuse von der Rinne entfernt ist, um so geringer werden die induzierten Verluste. Eine erhebliche Vergrößerung des Induktorgehäuses bedarf jedoch einer größeren Masse an Feuerfestmaterial für die Zustellung. Dabei würden außerdem die Vorteile einer kompakten Bauweise der Induktoreinheit verloren gehen. Somit sind der Gehäusevergrößerung bestimmte ökonomische und mechanische Grenzen gesetzt. Ähnlich wie auch beim Kühlzylinder hat aber auch das verwendete Gehäusematerial einen Einfluß auf die Größe der Wirbelstromverluste, wie die Untersuchungen beim Rinnenofenhersteller ABB-Industrietechnik in Dortmund zeigen. So ergeben sich beispielsweise für die Ausführung eines Rinnenschmelzofens zum Schmelzen von Kupfer oder einer Kupferlegierung um ca. 59 %

niedrigere Wirbelstromverluste für ein magnetisches Stahlgehäuse im Vergleich zu einem unmagnetischen Stahlgehäuse [BMFT92]. Dieser große Unterschied in den Wirbelstromverlusten läßt sich durch den Einfluß des verwendeten Stahls auf den Feldverlauf des magnetischen Wechselfeldes erklären. Während das unmagnetische Stahlgehäuse vom Feld fast ungehindert durchdrungen wird, dringt das Feld in das magnetische Gehäuse ein und wird in diesem wie in einem Magnetleiter entlanggeführt. Das magnetische Wechselfeld kann somit nur an der Gehäuseinnenseite Wirbelstromverluste verursachen, während die Gehäuseaußenseite feldfrei bleibt. Obwohl die für die Höhe der Wirbelstromverluste maßgebliche Stromeindringtiefe für das magnetische Gehäuse im Vergleich zum unmagnetischen Gehäuse kleiner ist, werden in diesem Fall weniger Wirbelstromverluste hervorgerufen.

In der Praxis zeigt sich jedoch, daß die Wirbelstromverluste bei der Rinnenofenausführung mit magnetischem Stahlgehäuse konventioneller Bauart für den Einsatz als Schmelzofen sehr hoch liegen. Bei einem 2000 kW Kupferinduktor mit magnetischem Stahlgehäuse liegen die Gehäuseverluste einschließlich der thermischen Verluste bei ca. 160 kW, das sind 8 % der Ofennennleistung [NACK92].

Maßnahmen zur Verringerung der Gehäuseverluste wurden in der Abschirmung der Gehäuseinnenseite mit Trafoblechen gesucht. Diese Anordnung konnte sich in der Praxis jedoch nicht durchsetzen. Die Trafobleche wurden während des Ofenbetriebes lokal überhitzt, dadurch wurde die abschirmende Wirkung außer Kraft gesetzt. Eine weitere Möglichkeit zur Gehäuseabschirmung vor dem Wechselfeld besteht in der Auskleidung der Gehäuseinnenseite mit einer dünnen Kupferschicht. Diese Anordnung, welche die feldverdrängende Wirkung der Kupferschicht nutzt, hat sich beim Einsatz in der Praxis bewährt.

Durch den Einsatz der Kupferbeschichtung am Gehäuse und die gleichzeitige Verwendung von Kühlzylindermaterial mit geringer elektrischer Leitfähigkeit konnte zum Beispiel der Gesamtwirkungsgrad eines 2400 kW Induktors zum Kupferschmelzen um 8 % von 83,5 % auf 91,5 % erhöht werden. Diese Steigerung bewirkt die Einsparung von 640.000 kWh Energie bei einer Jahresbetriebszeit des Rinnenofens von insgesamt 4000 h [NACK92], [BMFT92].

Die Gesamtverluste der auf diese Art und Weise optimierten Induktoreinheit betragen dann nur noch 170 kW. Dabei treten Induktor-, Kühlzylinder- und Gehäuseverluste etwa zu gleichen Anteilen auf. Im Vergleich zur bereits erwähnten Ausführung mit magnetischem Stahlgehäuse und Kupferkühlzylinder sinken die Gehäuseverluste von 160 kW auf 50 kW [BMFT92].

Die vorangehend aufgeführten Ergebnisse basieren auf näherungsweisen zweidimensionalen FEM-Berechnungen von Induktions-Rinnenöfen, die bei ABB in Dortmund durchgeführt wurden. Eine Angabe der Verlustleistungen in Kühlzylinder und Induktorgehäuse war immer nur in Verbindung mit einer vergleichenden Verlustmessung möglich.

Für die Optimierung von Rinnenöfen hinsichtlich maximalem Wirkungsgrad und minimalen Wirbelstromverlusten ist aber die genaue Kenntnis vom Verlauf des elektromagnetischen Feldes im Ofenraum erforderlich. Aufgrund der komplizierten Ofengeometrie mit den sich gegenseitig beeinflussenden Bauteilen Spule, Rückschluß, Kühlzylinder und Induktorgehäuse kann die Feldverteilung mit den traditionellen analytischen Methoden nicht mehr ermittelt werden. Eine Durchführung von Verlustmessungen an Rinnenofenmodellen ist für den Ofenhersteller bei der Ofenentwicklung nicht wirtschaftlich. Die Verluste können meist nur auf kalorimetrischem

Weg mit den damit verbundenen hohen Meßungenauigkeiten bestimmt werden. Die Modelle sind kompliziert und teuer. Am Ofenmodell kann der Magnetfeldverlauf nur schwierig visualisiert werden.

Durch die rasante Entwicklung der numerischen Rechentechnik in den letzten Jahren ist leistungsfähige Hardware kostengünstig verfügbar. Damit ist es sinnvoll, ein numerisches Berechnungsverfahren, das sich in hohem Maß als effizient und flexibel erwiesen hat, für die genaue dreidimensionale Magnetfeld- und Wirbelstromverlustberechnung einzusetzen. Zur Anwendung kommt die Methode der finiten Elemente FEM, siehe Kapitel 4. Die Vorteile der numerischen Methode liegen darin, daß es neben der einfachen Veränderung von Materialeigenschaften möglich ist auch die Abmessungen, z.B. Wanddicke, und die Lage der wirbelstrombehafteten Bauteile zu variieren. Die ermittelten Feld- und Wirbelstromverteilungen können grafisch dargestellt werden. Dadurch können Problemzonen ohne den Bau teurer Ofenmodelle schnell erkannt und korrigiert werden. Die Ergebnisse der Berechnungen können direkt in die Ofenkonstruktion einfließen.

Gegenstand der Untersuchungen dieser Dissertationsschrift ist die Induktoreinheit eines 2000 kW Rinnenofens zum Schmelzen von Kupfer oder Kupferlegierungen. Für die vorliegende Induktoranordnung sind die Magnetfeldverteilung und die Wirbelströme in den verlustbehafteten Bauteilen Kühlzylinder und Induktorgehäuse durch 3D-FEM-Berechnung zu ermitteln.

Diese Aufgabe war Bestandteil des 1991 an das Fachgebiet Elektrowärme der TU Ilmenau herangetragenen BMFT-Forschungsprojektes "Verbesserung der Energieausnutzung in umweltfreundlichen Induktions-Rinnenöfen durch Optimierung der Schmelzenströmung". Das Projekt wurde in Zusammenarbeit mit ABB-Industrietechnik in Dortmund und dem Institut für Elektrowärme der Universität Hannover durchgeführt. Die in Ilmenau durchgeführten Untersuchungen zur numerischen Berechnung der Wirbelstromverluste bilden den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Da die Aufgabenstellung zur Wirbelstromverlustberechnung am Induktionsrinnenofen nicht mit einem kommerziellen FEM-Programm gelöst werden konnte, mußte das in Ilmenau entwickelte Programmsystem "PROMETHEUS" um die in Kapitel 3.1 erläuterte A- ϕ -Formulierung erweitert werden. Eine Darstellung der numerischen Umsetzung und Hinweise für den Aufbau der algebraischen Gleichungssysteme sind in Kapitel 4.2 enthalten.

Für den in Kapitel 6.1 aufgeführten doppelloopigen 2000 kW Netzfrequenz-Induktionsrinnenofen wurden bei der Wirbelstromverlustberechnung die Materialien von Kühlzylinder und Induktorgehäuse variiert und deren Einflüsse auf die Feld- und Wirbelstromverteilung untersucht. Die Zahlenergebnisse der Berechnungen und ein Vergleich mit Messungen sind in Kapitel 6.3 und 6.4 enthalten. Ausgewählte grafische Darstellungen von Wirbelstrom- und Feldverläufen befinden sich in den Anlagen zu dieser Arbeit.

3. Theoretische Grundlagen der Feld- und Wirbelstromberechnung

Als Ausgangsbasis für die Formulierung eines geeigneten Feldmodells zur numerischen Berechnung des elektromagnetischen Feldes im Induktions-Rinnenofen dient das *Maxwell'sche* System der Grundgleichungen des Elektromagnetismus [SIM89], [LEHN94]. In komplexer Schreibweise notiert, erhält man die vier Feldgleichungen für ruhende Anordnungen, d.h. ohne bewegte Objekte

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}} \quad (3.1)$$

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \quad (3.2)$$

$$\text{div } \underline{\vec{D}} = \rho \quad (3.3)$$

$$\text{div } \underline{\vec{B}} = 0 \quad (3.4)$$

wobei: $\underline{\vec{B}}$... magnetische Induktion

$\underline{\vec{D}}$... dielektrische Verschiebung

$\underline{\vec{E}}$... elektrische Feldstärke

$\underline{\vec{H}}$... magnetische Feldstärke

$\underline{\vec{J}}$... elektrische Stromdichte

ρ ... elektrische Raumladungsdichte

und die drei Materialgleichungen:

$$\underline{\vec{B}} = \mu \underline{\vec{H}} \quad (3.5)$$

$$\underline{\vec{D}} = \epsilon \underline{\vec{E}} \quad (3.6)$$

$$\underline{\vec{J}} = \kappa \underline{\vec{E}} \quad (3.7)$$

mit: ϵ ... Permittivität

μ ... Permeabilität

κ ... spezifische elektrische Leitfähigkeit

Für quasistationäre Felder, d.h. bei nicht zu schnellen zeitlichen Änderungen des Feldes, kann die Verschiebungsstromdichte $j\omega \underline{\vec{D}}$ gegenüber der Leitungsstromdichte $\underline{\vec{J}}$ vernachlässigt werden [WUN89]. Diese Voraussetzung ist für Induktionsrinnenöfen, die bei Netzfrequenz betrieben werden, erfüllt.

Somit folgt:

$$j\omega \underline{\vec{D}} = \underline{\vec{0}} \quad (3.8)$$

3.1 Beschreibung des elektromagnetischen Feldes von Induktionsöfen

Als vereinfachende Annahmen für die Formulierung der Feldgleichungen zur Berechnung des elektromagnetischen Feldes in Induktionsöfen werden definiert:

1. Alle zu berechnenden Feldgrößen weisen zeitlich sinusförmigen Verlauf auf.
2. Die Leitungsstromdichte \vec{J} ist im Vergleich zur Verschiebungsstromdichte $j\omega\vec{D}$ wesentlich größer, d.h. die Verschiebungsstromdichte ist nach (3.8) vernachlässigbar.
3. Es werden inhomogene, aber lineare Materialeigenschaften für μ und κ zugelassen.
4. Die Permeabilität μ ist zeitlich konstant, kann aber in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke \vec{H} definiert werden.

Unter den genannten Bedingungen 1. bis 4. vereinfacht man die allgemeinen *Maxwell'schen* Grundgleichungen (3.1) ... (3.7) in die Ausgangsgleichungen für das quasistationäre Feld.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad \text{Durchflutungsgesetz} \quad (3.9)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\vec{B} \quad \text{Induktionsgesetz} \quad (3.10)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{und: } \vec{B} = \mu\vec{H} \quad (3.12)$$

$$\vec{J} = \kappa\vec{E} \quad (3.13)$$

Das quellenfreie magnetische Vektorfeld \vec{B} in Gleichung (3.11) läßt sich durch

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (3.14)$$

die Wirbel eines Vektorpotentials beschreiben. \vec{A} ist das Vektorpotential des quellenfreien magnetischen Feldes. Damit wird die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes vom Lösungsansatz erfüllt, denn die Rotation des Vektorfeldes \vec{A} (\vec{A} stetig und stetig differenzierbar) ist divergenzfrei

$$\text{div rot } \vec{A} = 0. \quad (3.15)$$

Da die Wirbel eines Gradientenfeldes verschwinden, existieren für das Vektorfeld \vec{B} dabei aber neben dem bestimmten Vektorpotential \vec{A}_W noch eine beliebige Anzahl von Vektorpotentialen der Form $\text{grad } \varphi_A$, ohne daß die Rotation dadurch beeinflußt wird [KOST94].

$$\vec{A} = \vec{A}_W + \text{grad } \varphi_A. \quad \varphi_A \dots \text{skalare Potentialfunktion} \quad (3.16)$$

Das aus dem Wirbelanteil \vec{A}_W und dem wirbelfreien Skalaranteil $\text{grad } \varphi_A$ bestehende magnetische Vektorpotential \vec{A} ist somit nach Gleichung (3.14) noch nicht eindeutig definiert. Für die Eindeutigkeit muß zusätzlich eine geeignete Eichung gewählt werden, siehe (3.26).

3.1.1 Herleitung der feldbeschreibenden Differentialgleichungen in A- φ -Formulierung

Ziel der numerischen Feldanalyse vom Induktionsrinnenofen, siehe Kapitel 2 und Kapitel 6, ist die Wirbelstromverlustberechnung in den Bauteilen Kühlzylinder und Induktorgehäuse. Die Struktur weist neben leitfähigen Gebieten mit Wirbelströmen (Induktor, Kühlzylinder, Gehäuse, Rinne) auch wirbelstromfreie Abschnitte (Luftgebiet, Ofenausmauerung) auf.

Unter Voraussetzung linearer Materialeigenschaften nach Abschnitt 3.1 liegt damit ein klassisches Wirbelstromproblem ähnlich [BIRO89] vor.

Aufbauend auf den am FG Elektrowärme geleisteten Vorarbeiten zur quasistationären Feldberechnung mit einfachem Vektorpotentialansatz [LÜDT90], läßt sich das elektromagnetische Feld mit der A- φ -Formulierung beschreiben. Dabei werden vom Lösungsansatz (3.16) ein Wirbelanteil \vec{A}_W und ein quellenfreier Anteil $\text{grad } \varphi$ für das Vektorpotential gleichzeitig berücksichtigt.

Ein Nachteil ergibt sich für die A- φ -Formulierung in der bei hohen Knotenpunktanzahlen im Gitternetz sehr schnell anwachsenden Systemmatrix aufgrund von bis zu vier komplexen Unbekannten, d.h. insgesamt acht Unbekannten je Knotenpunkt. Dieser Nachteil ließe sich durch die Anwendung der A- φ - Ψ -Formulierung [BIRO89] mit einem magnetischen Skalarpotential Ψ im Luftgebiet, das nur eine Komponente besitzt, umgehen. Jedoch wäre dann der Aufwand für die Berücksichtigung der Übergangsbedingungen zwischen den Materialgrenzflächen im Vergleich zur reinen A- φ -Variante wesentlich höher, so daß diese A- φ - Ψ -Methode hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Als weitere Methode für die Behandlung von Wirbelstromproblemen wird in [BIRO94] neben der A- φ -Formulierung eine T- φ -Ansatzformulierung, auch als T- Ω -Ansatz [REN88] bekannt, angegeben. Dabei wird neben einem Strömungsvektorpotential \vec{T} noch ein skalares magnetisches Potential φ definiert. Beide Methoden werden in [BIRO94] für die nichtlineare Wirbelstromberechnung an einem einfachen Testbeispiel eingesetzt. Die Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften im Eisenkreis erfordert jedoch die iterative Berechnung der Permeabilität μ und die nachfolgende Neuberechnung der Potentiale, bis Konvergenz erreicht ist.

Die Berücksichtigung einer nichtlinearen Permeabilität würde einen nicht vertretbaren hohen Rechenaufwand bedeuten und auf der verfügbaren Workstation zu uneffektiv langen Rechenzeiten führen. Aus diesem Grund werden, wie bereits angegeben, lineare Materialeigenschaften angesetzt.

Die Ableitung der partiellen Differentialgleichungen in einfacher A- φ -Formulierung für das lineare Wirbelstromproblem im Induktionsrinnenofen erfordert folgende Schritte:

Ausgehend vom Durchflutungsgesetz (3.9), von der Materialgleichung (3.12) und Definition (3.14) erhält man nach der Umformung

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \quad (3.17)$$

zunächst die Gleichung

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \vec{J} . \quad (3.18)$$

Das Induktionsgesetz (3.10) und Gleichung (3.14) liefern den Ausdruck

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - j\omega \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} (- j\omega \vec{A}) \quad (3.19)$$

und dementsprechend folgt unter Verwendung von (3.16)

$$\operatorname{rot} (\vec{E} + j\omega (\vec{A}_W + \operatorname{grad} \varphi_A)) = \vec{0} \quad (3.20)$$

Da die Rotation Null wird, ergibt sich als weiterer Freiheitsgrad das elektrische Skalarpotential φ_o , ohne daß die Gleichung (3.20) verletzt wird .

$$\operatorname{rot} (\vec{E} + j\omega (\vec{A}_W + \operatorname{grad} \varphi_A) + \operatorname{grad} \varphi_o) = \vec{0} \quad (3.21)$$

Für die elektrische Feldstärke folgt aus (3.21)

$$\vec{E} = - j\omega (\vec{A}_W + \operatorname{grad} \varphi_A) - \operatorname{grad} \varphi_o . \quad (3.22)$$

Der in (3.22) enthaltene Ausdruck für φ_o beschreibt die eingeprägte quellenfreie Feldstärke.

$$\vec{E}_o = - \operatorname{grad} \varphi_o \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_o = 0 \quad (3.23)$$

Unter Verwendung von Materialgleichung (3.13) erhält man nach Einsetzen der eingepägten Feldstärke aus (3.23) die Beziehung für die Stromdichte

$$\vec{J} = - j\omega \kappa (\vec{A}_W + \operatorname{grad} \varphi_A) + \kappa \vec{E}_o . \quad (3.24)$$

Der Term $\kappa \vec{E}_o$ kennzeichnet hierbei die am Induktor eingeprägte quellenfreie Stromdichte \vec{J}_o .

Wird (3.24) in (3.18) eingesetzt, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}_W \right) + j\omega \kappa (\vec{A}_W + \operatorname{grad} \varphi_A) = \vec{J}_o . \quad (3.25)$$

Da das magnetische Vektorpotential nach (3.16) noch nicht eindeutig bestimmt ist, wird zur Festlegung der Divergenz von \vec{A} die *Coulomb*-Eichung eingeführt [LEHN94],[ONU93].

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (3.26)$$

Neben der Forderung nach Divergenzfreiheit des Vektorpotentials muß in den leitfähigen Gebieten auch die Quellenfreiheit der Stromdichte erfüllt werden.

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (3.27)$$

Damit ergibt sich die zweite, gleichzeitig mit Gleichung (3.25) zu erfüllende Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \left(j\omega \kappa \left(\vec{A}_w + \operatorname{grad} \varphi_A \right) \right) = 0. \quad (3.28)$$

Um die *Coulomb*-Eichung (3.26) zu erfüllen wird in Gleichung (3.25) zusätzlich noch der Term

$$- \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{A}_w \right) \quad (3.29)$$

eingefügt. Dadurch erhält man

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}_w \right) - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{A}_w \right) + j\omega \kappa \left(\vec{A}_w + \operatorname{grad} \varphi_A \right) = \vec{J}_o. \quad (3.30)$$

Für Gleichung (3.30) muß jedoch gesichert werden, daß der Term, welcher die Divergenz von \vec{A} beinhaltet, auch tatsächlich Null wird.

Bildet man die Divergenz von (3.30) unter Berücksichtigung von Ausdruck (3.28) so erhält man

$$\Delta \psi = \Delta \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{A}_w \right) = 0. \quad (3.31)$$

Werden für die Funktion ψ homogene *Dirichletsche* Randbedingungen eingesetzt [WOHL95]

$$\left. \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{A}_w \right|_{\Gamma} = 0 \quad (3.32)$$

mit Γ ... Oberfläche des Lösungsgebietes, so verschwindet die Funktion ψ in jedem Punkt des Lösungsgebietes.

Durch das Einfügen der Randbedingung (3.32) kann demnach der Term (3.29) in Gleichung (3.30) bei der numerischen Lösung die Divergenzfreiheit erfüllen, d.h. die Lösung Null bzw. einen numerisch vernachlässigbaren Wert annehmen.

Das partielle Differentialgleichungssystem bestehend aus den Gleichungen (3.28) und (3.30) dient der vollständigen Beschreibung des dreidimensionalen elektromagnetischen Feldes für den Induktions-Rinnenofen. Die numerische Lösung des Gleichungssystems erfolgt, wie in Kapitel 4 beschrieben, unter Anwendung der Finite Elemente Methode.

3.1.2 Zu berücksichtigende Rand- und Symmetriebedingungen

Bevor das Gleichungssystem (3.28) und (3.30) im Rinnenofen-Lösungsgebiet numerisch berechnet werden kann, müssen jedoch die an den Rand- und Grenzflächen des Lösungsgebietes geltenden Rand- und Symmetriebedingungen Berücksichtigung finden. Die vorliegende Skizze verdeutlicht dies.

Gegeben sei eine Modellanordnung ähnlich dem doppelloopigen Rinnenofen in Kapitel 6. Diese Anordnung nach Skizze 3.1 bestehe aus der Rinne 2, dem Magnetleiter 4, dem Kühlzylinder 5 und dem Luftgebiet 3.

Das magnetische Vektorpotential \vec{A} besitzt dabei in allen Abschnitten 2 bis 5 von Null verschiedene räumliche Komponenten, während das skalare Potential φ nur in den leitfähigen Gebieten 2 sowie 5 existiert.

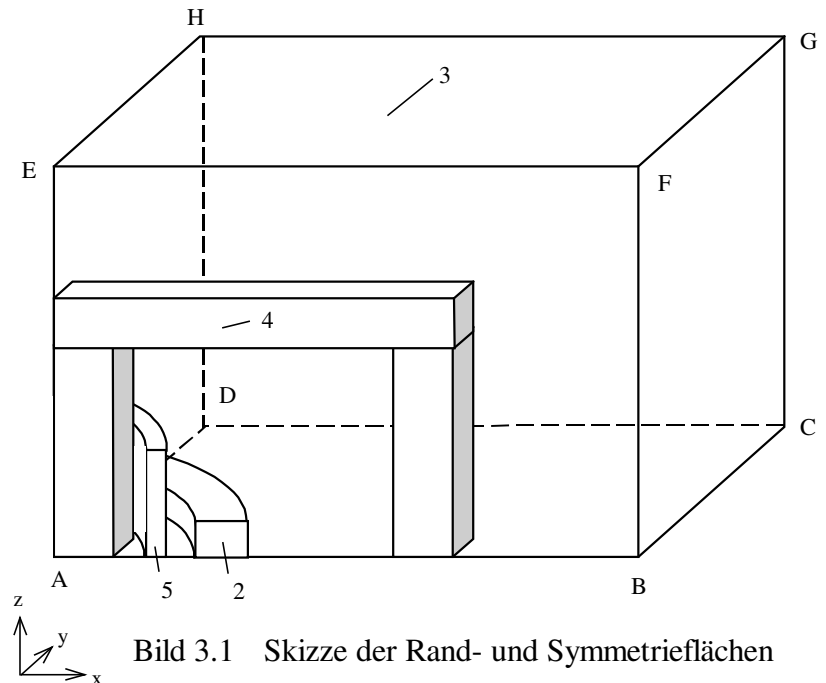


Bild 3.1 Skizze der Rand- und Symmetriefflächen

Als Randbedingungen für das Vektorpotential und skalare Potential findet man:

1. Symmetrieffläche ABCD : Das magnetische Vektorpotential hat nur Tangentialkomponenten, die Normalkomponente ist Null.

$$\underline{A}_z = 0, \text{ aus } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \text{ folgt } \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial z} = 0, \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial z} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

2. Symmetrieffläche ABEF : Das magnetische Vektorpotential hat nur eine Normalkomponente. In diesem Fall die y-Komponente.

$$\underline{A}_x = 0, \underline{A}_z = 0, \text{ aus } \text{div } \vec{A} = 0 \text{ folgt } \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial y} = 0 \quad (3.34)$$

$$\underline{\varphi} = 0 \quad (\text{nur Gebiete mit } \kappa > 0)$$

3. Symmetrieffläche ADEH : Das magnetische Vektorpotential hat nur eine x-Komponente.

$$\underline{A}_y = 0, \underline{A}_z = 0, \text{ mit } \text{div } \vec{A} = 0 \text{ folgt: } \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x} = 0 \quad (3.35)$$

$$\underline{\varphi} = 0 \quad (\text{nur Gebiete mit } \kappa > 0)$$

4. Außenflächen Auf den Außenflächen wird das Vektorpotential oder seine BCGF ,CDHG ,EFGH : Normalkomponente und die Ableitungen der Tangentialkomponenten in Normalenrichtung Null gesetzt.

$$a) \quad \underline{A}_x = 0, \quad \underline{A}_y = 0, \quad \underline{A}_z = 0 \quad (3.36)$$

$$b) \quad \underline{A}_x = 0, \quad \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial x} = 0 \quad (\text{BCGF})$$

$$\underline{A}_y = 0, \quad \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial y} = 0 \quad (\text{CDGH})$$

$$\underline{A}_z = 0, \quad \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial z} = 0 \quad (\text{EFGH})$$

Neben den Rand- und Symmetriebedingungen treten auch innerhalb des Lösungsgebietes sogenannte "Übergangsbedingungen" für Vektor- und skalares Potential auf, die für die richtige Lösung des Feldproblems mit zu berücksichtigen sind. Zu diesen Übergangsbedingungen gehört zum Beispiel die Übergangsbedingung von magnetischer Flußdichte und Vektorpotential zwischen Gebieten mit unterschiedlicher magnetischer Permeabilität.

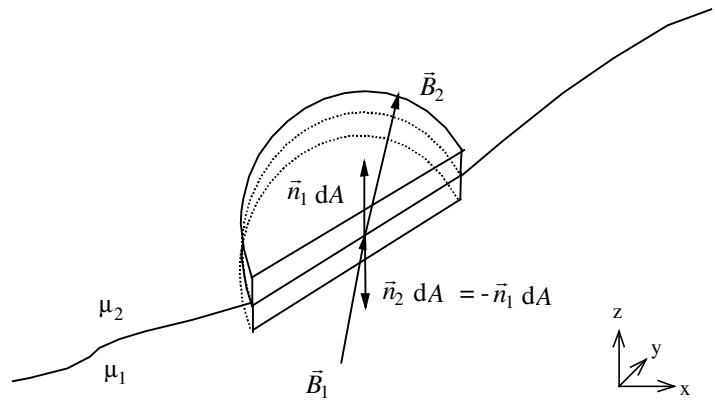


Bild 3.2 Skizze der Normalkomponenten von \vec{B}

Beschreibt man die magnetische Flußdichte für das kleine scheibenförmige Volumen dV nach Bild 3.2 so erhält man

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV &= \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} \, dA = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Da Gleichung (3.37) unter der Bedingung

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.38)$$

erfüllt wird, folgt daraus die Übergangsbedingung für die Normalkomponente der magnetischen Flußdichte \vec{B} ,

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.39)$$

d.h. die Normalkomponenten der Magnetflußdichte gehen stetig über.

Auf ähnliche Art und Weise gelangt man ausgehend von der Beziehung

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.40)$$

zur Übergangsbedingung für die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke \vec{H}

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = 0. \quad (3.41)$$

Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke gehen stetig über, wenn kein Flächenstrom über die Grenzfläche fließt (3.40).

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \quad \text{bzw.} \quad H_{1t} = H_{2t} \quad (3.42)$$

Unter Verwendung der Zusammenhänge zwischen magnetischem Vektorpotential und der Feldstärke können die Gleichungen (3.38) und (3.41) auch folgendermaßen formuliert werden

$$(\text{rot } \vec{A})_1 \cdot \vec{n} = (\text{rot } \vec{A})_2 \cdot \vec{n} \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\text{rot } \vec{A})_1 \times \vec{n} = \frac{1}{\mu_2} (\text{rot } \vec{A})_2 \times \vec{n}. \quad (3.44)$$

Nach Übergang zur Komponentenschreibweise mit $\vec{n} = \vec{e}_z$ erhält man für Gleichung (3.43) und

$$(3.44): \quad \frac{\partial A_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x1}}{\partial y} = \frac{\partial A_{y2}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x2}}{\partial y} \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{z1}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y1}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{x1}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z1}}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{z2}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y2}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{x2}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z2}}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Die Ableitungen aller Komponenten des stetigen Vektorpotentials in Tangentialrichtung sind zwangsläufig identisch

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial y} = \frac{\partial A_{z2}}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_{z1}}{\partial x} = \frac{\partial A_{z2}}{\partial x} \quad (3.47)$$

Dies führt zu einer Einschränkung der Freiheitsgrade bei der Beschreibung des μ_r -Sprunges bzgl. $H_{1t} = H_{2t}$.

Mit dem normalen knotenorientierten Vektorpotentialansatz siehe (4.4) wird der stetige Übergang der Normalkomponente für die magnetische Flußdichte (3.45) vollständig erfüllt. Aber der sprunghafte Übergang der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke (3.46) kann mit dem stetigen Vektorpotentialansatz infolge (3.47) nicht gewährleistet werden, siehe auch [ANSY].

Es tritt ein systematischer Fehler auf. Der systematische Fehler hat jedoch keinen erkennbaren Einfluß auf die berechneten Wirbelstromverluste im Induktionsrinnenofen, wie der Vergleich von Messung und Rechnung in Abschnitt 6.4.2 und 7.4 zeigt.

Als Alternative zur Vermeidung des systematischen Fehlers wird in der Literatur z.B. [BAR87], [AKI90] die Anwendung von „Edge“-Elementen, d.h. finiten Elementen mit kantenorientiertem Lösungsansatz vorgeschlagen. Für kantenorientierte finite Elemente ist bereits vom Lösungsansatz her der sprunghafte Übergang der tangentialen Komponente von \vec{H} gewährleistet.

3.2 Berechnung der Integralparameter und Verlustleistungen

Bevor die in den Konstruktionselementen Kühlzylinder und Gehäuse des Rinnenofens umgesetzten Wirk- und Verlustleistungen berechnet werden können, sind zunächst ausgehend vom Pointingschen Vektor die in den einzelnen Rinnenofengebieten induzierten Leistungsdichten zu bestimmen. Der Pointingvektor beschreibt die Energie, die durch eine senkrecht zu S stehende Einheitsfläche je Zeiteinheit hindurchströmt [SIM89],[RUD89],[MOH93]:

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H}^* \quad . \quad (3.48)$$

Die Scheinleistung \underline{S} setzt sich zusammen aus einem Wirk- und einem Blindleistungsanteil:

$$\underline{S} = P + jQ \quad . \quad (3.49)$$

Nach dem Prinzip der Energieerhaltung stehen die im Ofenraum umgesetzte Scheinleistung und die über die Oberfläche eingetragene bzw. "abfließende" Scheinleistung im Gleichgewicht.

$$\underline{S} = - \oint_A \vec{S} d\vec{A} = - \int_V \text{div } \vec{S} dV \quad (3.50)$$

Nach Einsetzen von (3.48) in (3.50) und Anwenden einer Rechenregel für die Divergenzbildung des Kreuzproduktes [BRON60] ergibt sich:

$$\underline{S} = \int_V \vec{E} \text{rot } \vec{H}^* dV - \int_V \vec{H}^* \text{rot } \vec{E} dV \quad . \quad (3.51)$$

Unter Zuhilfenahme der in Abschnitt 3.1 aufgeführten *MAXWELL*-Gleichungen (3.9) - (3.13) können linker und rechter Term in (3.51) nun noch geeignet interpretiert werden.

$$\underline{S} = \int_V \frac{|\vec{J}|^2}{\kappa} dV + j \int_V \frac{\omega |\vec{B}|^2}{\mu} dV \quad (3.52)$$

Entsprechend Gleichung (3.49) stellt der erste Summand in Gleichung (3.52) die in den jeweiligen Teilgebieten $ge = 1 \dots n$ auftretenden Wirbelstromverlustleistungen dar.

$$P = \sum_{ge=1}^n P_{ge} = \sum_{ge=1}^n \int_{V_{ge}} \frac{|\vec{J}_{ge}|^2}{\kappa_{ge}} dV_{ge} \quad (3.53)$$

Die Stromdichte \vec{J}_{ge} im jeweiligen Gebiet ist dabei nach (3.54) zu berechnen,

$$\vec{J}_{ge} = \vec{J}_0 - j \omega \kappa_{ge} (\vec{A}_{ge} + \text{grad } \varphi_{ge}) \quad (3.54)$$

und anschließend über die Gebietsvolumina separat numerisch zu integrieren.

Auf dieselbe Art und Weise werden die Blindleistungsanteile in Gleichung (3.52) berechnet.

$$Q = \sum_{ge=1}^n Q_{ge} = \sum_{ge=1}^n \int_{V_{ge}} \frac{\omega |\vec{B}_{ge}|^2}{\mu_{ge}} dV_{ge} \quad (3.55)$$

Die magnetische Induktion \vec{B}_{ge} wird dabei gebietsweise aus dem Vektorpotential \vec{A} gebildet:

$$\vec{B}_{ge} = \text{rot } \vec{A}_{ge} \quad (3.56)$$

Sind die Real- und Blindleistungsanteile in den einzelnen Gebieten berechnet, so können daraus der elektrische Wirkungsgrad η_{el} und der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ bestimmt werden.

$$\eta_{el} = \frac{P_{Rin}}{P_{Ind} + P_{Rin} + P_{Kz} + P_{Geh}} \cdot 100 \quad [\%] \quad (3.57)$$

$$\cos \varphi = \frac{P_{Ges}}{\sqrt{P_{Ges}^2 + Q_{Ges}^2}} \quad (3.58)$$

Für die Beurteilung von numerischen Berechnungsfehlern ist eine weitere integrale Bilanz für die Stromdichte auszuwerten.

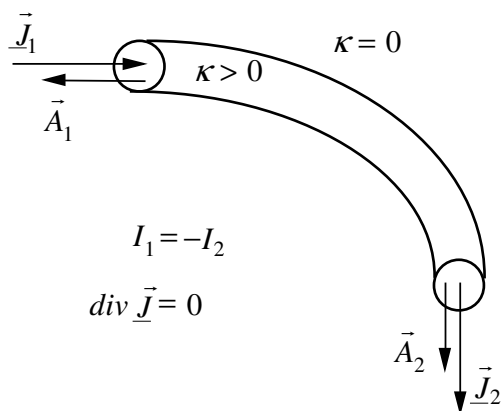
Unter Anwendung des *Gaußschen* Satzes auf die quellenfreie Stromdichte nach (3.27) erhält man:

$$\oint_A \vec{J} d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{J} dV = 0 \quad (3.59)$$

Aus Bild 3.3 wird ersichtlich, daß der Strom durch einen unverzweigten Leiterabschnitt genau eine Eintritts- und auch genau eine Austrittsfläche hat. Über beide Flächen fließt Strom in gleicher Stärke, d.h.

$$\int_{A_1} \vec{J}_1 d\vec{A}_1 = - \int_{A_2} \vec{J}_2 d\vec{A}_2 \quad (3.60)$$

Die Bedingung für die Quellenfreiheit des Stromes (3.60) gibt an, daß der in einen nicht verzweigten elektrischen Leiter hineinfließende Strom I_1 betragsmäßig gleich dem hinausfließenden Strom I_2 am gegenüberliegenden Ende dieses Leiters sein muß.



Die Strombilanz (3.60) wird bei den Auswertungen zu den Voruntersuchungen in Kapitel 5 und den Rinnenofenberechnungen in Kapitel 6 als Genauigkeitsnachweis ausgewiesen.

Die Integration erfolgt numerisch anhand der Formfunktionen für die Symmetrieelemente.

Bild 3.3 Strombilanz für einen unverzweigten Leiterabschnitt

4. Numerische Lösung der Feldgleichungen

Für das in Abschnitt 3.1.1. hergeleitete partielle Differentialgleichungssystem (3.28) und (3.30) zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes im Induktions-Rinnenofen kann aufgrund der komplizierten Ofengeometrie und der Vielzahl von Materialien, die im Lösungsgebiet zu berücksichtigen sind, keine geschlossene analytische Lösung mehr angegeben werden. Um die in den Differentialgleichungen enthaltenen Feldgrößen dennoch bestimmen zu können, muß ein geeignetes numerisches Berechnungsverfahren zur näherungsweisen Lösung eingesetzt werden.

Ein mittlerweile sehr weit verbreitetes Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen und -gleichungssystemen ist die Finite Elemente Methode (FEM) [ZIEN84],[SCHW91]. Prinzipiell lassen sich mit dieser Methode eine Vielzahl an physikalischen und technischen Problemstellungen, welche mit Differentialgleichungen beschrieben werden können, auf numerischem Wege berechnen. Ursprünglich nur für Aufgabenstellungen in der Elastomechanik entwickelt, wird das auf finiten Elementen basierende Verfahren auch zur Berechnung von stationären und instationären Feldern eingesetzt. Beispiele dafür sind neben elektro- und magnetostatischen Feldern, quasistationäre elektromagnetische Felder und Temperaturfelder.

Der entscheidende Vorteil, den die FEM gegenüber anderen numerischen Berechnungsverfahren aufweist, ist die genaue und flexible Erfassung von beliebigen Geometrien im Lösungsgebiet. Dabei können im Gegensatz zur Boundary-Elemente Methode (BEM) oder Randelemente-Methode [BREB90] auch Vorgänge innerhalb von dünnen leitfähigen Schichten mit erfaßt werden, vorausgesetzt daß diese Schichten fein genug in Einzelelemente unterteilt wurden. Die finiten Elemente weisen jedoch den Nachteil auf, das gesamte Lösungsgebiet in Elemente unterteilen zu müssen. Dieser Nachteil könnte nur mit hohem numerischen Aufwand, wie in [KOST94] beschrieben, durch eine FEM-BEM-Kopplung umgangen werden. Die FEM gelangt dabei im Wirbelstromgebiet und die BEM im wirbelstromfreien Luft- bzw. Nichtleitergebiet und auf den leitfähigen Oberflächen zur Anwendung.

Im zu berechnenden Rinnenofen befinden sich, wie in Kapitel 6 beschrieben, dünne leitfähige Schichten in Form der Konstruktionselemente Kühlzylinder und Gehäuse. Innerhalb dieser Konstruktionsteile wird der Verlauf des magnetischen Vektorpotentials und Skalarpotentials zur Berechnung der Stromdichte und nachfolgenden Berechnung der Wirbelstromverluste gesucht. Aufgrund der komplizierten Geometrie von Kühlzylinder und Induktorgehäuse könnte die Finite Differenzen Methode (FDM) [STRA93] nur mit hohem Aufwand für eine exakte Konturbeschreibung dieser Konstruktionsteile angewendet werden. Nachteilig würde sich insbesondere das bei der FDM erforderliche regelmäßige topologische Gitternetz auswirken. Vom Lösungsverfahren her stellt die FDM dagegen einen sehr einfach beherrschbaren Algorithmus mit schwach besetzter diagonalendominanter Matrix, wie auch bei der FEM vorhanden [KOST94], dar.

Aus den genannten Gründen wurde die Berechnung des elektromagnetischen Feldes und die nachfolgende Wirbelstrom- und Verlustberechnung mit der Methode der finiten Elemente durchgeführt. Die Ergebnisse der Rinnenofenberechnung sind in Kapitel 6 und Anhang A4 enthalten.

In den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels wird, soweit es zum Verständnis des numerischen Hintergrundes unbedingt erforderlich ist, auf das Prinzip der finiten Elemente eingegangen. Ausführliche Beachtung findet dabei die Anwendung des Galerkin-Verfahrens zur Umformung des feldbeschreibenden Differentialgleichungssystems in ein algebraisches Gleichungssystem.

4.1 Prinzip der Finiten Elemente Methode

Wie bei anderen numerischen Lösungsverfahren, so muß auch bei der Methode der finiten Elemente das Lösungsgebiet zunächst in eine Anzahl von einfacheren Teilgebieten unterteilt werden. Diese ebenen oder räumlichen Gebiete sind die sogenannten finiten Elemente.

Als Elementtypen können für zweidimensionale Berechnungen Dreiecke, Vierecke und Parallelogramme und bei dreidimensionalen Rechnungen Tetraeder, Dreiecksprismen oder Hexaeder, wie in Bild 4.1 skizziert, eingesetzt werden.

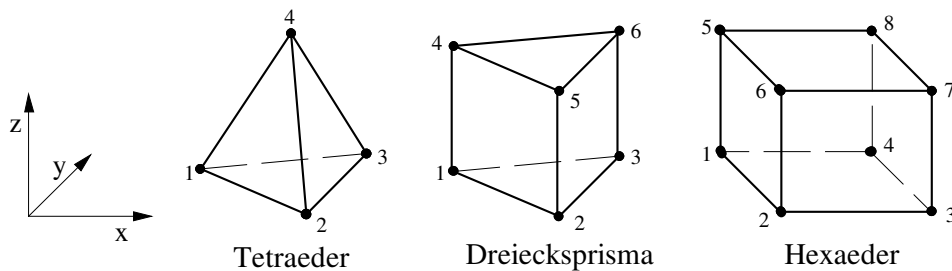


Bild 4.1 Einfache dreidimensionale finite Elementtypen

Im Allgemeinen können die genannten ebenen Elemente krummlinig oder geradlinig begrenzt, und die räumlichen Elemente von ebenen oder gekrümmten Seitenflächen umschlossen sein. Krummlinige oder von gekrümmten Flächen begrenzte Elemente ermöglichen eine flexiblere, dem Problem besser angepaßte Erfassung der Geometrie im Lösungsgebiet. Lokal unnötig feine Unterteilungen, die mit geradlinigen Elementen erforderlich wären, können umgangen werden. Auf die Vermeidung von sehr spitzen oder stumpfen Winkeln in den Elementen sollte aber geachtet werden, da diese einen Genauigkeitsverlust bewirken.

Nach der Zerlegung des Lösungsgebietes Ω in finite Elemente Ω_e mit

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^m \Omega_e,$$

wie in Bild 4.2 am zweidimensionalen Beispiel angedeutet, wird in jedem Einzelement für die gesuchte Funktion ein problemgerechter Lösungsansatz festgelegt. Als Formfunktionen können lineare, quadratische oder Funktionen höherer Ordnung verwendet werden.

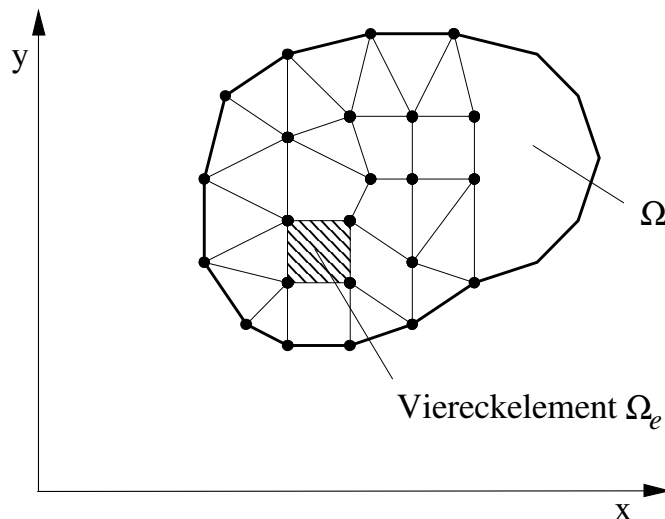


Bild 4.2 Unterteilung eines ebenen Gebietes in finite Elemente

Allgemein formuliert, wird die gesuchte Funktion in jedem Element Ω_e in der Form

$$u^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n^e} u_i(x_i, y_i, z_i) \cdot N_i^e(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.1)$$

angenähert, wobei

$u_i(x_i, y_i, z_i)$ die am Knotenpunkt i des Elementes Ω_e gesuchte Funktion und

$N_i^e(x, y, z)$ die von den Koordinaten der Eckpunkte des Elementes Ω_e
abhängige Formfunktion

sind. Für Hexaeder mit linearem Ansatz (siehe Bild 4.1) ist die Formfunktion als Polynom wie folgt definiert:

$$N_i^e(x, y, z) = c_{i_1}^e + c_{i_2}^e x + c_{i_3}^e y + c_{i_4}^e z + c_{i_5}^e xy + c_{i_6}^e xz + c_{i_7}^e yz + c_{i_8}^e xyz \quad (4.2)$$

Die in (4.2) enthaltenen Koeffizienten werden anhand der Knotenpunktkoordinaten des jeweiligen finiten Elementes bestimmt. Dabei wird die Eigenschaft der Formfunktion genutzt, am Knotenpunkt mit den Koordinaten (x_i, y_i, z_i) gleich Eins und an den anderen Knoten innerhalb des Elementes Null zu sein.

$$N_i^e(x_j, y_j, z_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.3)$$

Da die Formfunktionen im größten Teil des Lösungsgebietes Null sind, ergeben sich schwach besetzte Bandmatrizen im algebraischen Gleichungssystem.

Bei der numerischen Lösung kann diese Form der Matrizen durch die Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens berücksichtigt werden.

Für die Berechnung einer Problemstellung mit der Finiten Elemente Methode sind generell die nachfolgend angegebenen Teilschritte auszuführen:

1. Formulierung der Differentialgleichungen für das zu beschreibende Problem
2. Festlegung der Grenzen des Lösungsgebietes
3. Unterteilung des Lösungsgebietes in finite Elemente
4. Aufbau des algebraischen Gleichungssystems unter Einarbeitung von Rand- und Symmetriebedingungen
5. numerische Lösung des Gleichungssystems
6. Auswertung der Rechnung

4.2 Anwendung des Verfahrens von Galerkin

Mit dem Verfahren von Galerkin (Methode der gewichteten Residuen) können auch Lösungen für Differentialgleichungen aufgefunden werden, für die kein äquivalentes Variationsproblem formuliert werden kann. Dabei wird die ursprüngliche Differentialgleichung oder das System von Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Rand- und Anfangsbedingungen in ein System von n linear unabhängigen Differentialgleichungen überführt. Das so entstandene Integro-Differentialgleichungssystem kann, wie in Abschnitt 4.2.3 erläutert, in ein algebraisches Gleichungssystem umgewandelt werden. Für die Lösung des algebraischen Systems stehen geeignete Berechnungsverfahren, wie zum Beispiel am Ende von Abschnitt 4.3 dargestellt, zur Verfügung.

4.2.1 Aufstellung des Näherungsansatzes

In jedem einzelnen finiten Element Ω_e werden für die in den Differentialgleichungen (3.28) und (3.30) gesuchten Feldgrößen Vektorpotential und skalares Potential zunächst lokale Näherungsansätze nach Gleichung (4.1) eingeführt.

$$\underline{\tilde{A}}^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{A}}_i(x_i, y_i, z_i) N_i^e(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.4)$$

$$\underline{\tilde{\varphi}}^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\varphi}_i(x_i, y_i, z_i) N_i^e(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.5)$$

Die Symbole in (4.4) und (4.5) haben folgende Bedeutung:

n^e Anzahl der Stützstellen (Knotenpunkte) im Element Ω_e

$\underline{\tilde{A}}_i(x_i, y_i, z_i) = \underline{A}_x(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{e}_x + \underline{A}_y(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{e}_y + \underline{A}_z(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{e}_z$
 Vektorpotential am Knotenpunkt i des Elementes Ω_e

$\underline{\varphi}_i(x_i, y_i, z_i)$ Skalares Potential am Knotenpunkt i des Elementes Ω_e

$N_i^e(x, y, z)$ Formfunktion des Knotenpunktes i im Element Ω_e .

Auch die an den einzelnen Knotenpunkten eingeprägte Stromdichte wird mit einem lokalen Näherungsansatz innerhalb der Einzelelemente approximiert.

$$\underline{\tilde{J}}_0^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{J}}_{0i}(x_i, y_i, z_i) N_i^e(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.6)$$

$\underline{\tilde{J}}_{0i}(x_i, y_i, z_i)$ Eingeprägte Stromdichte am Knotenpunkt i des Elementes Ω_e

Innerhalb jedes Einzelementes Ω_e verlaufen die lokalen Näherungsansätze stetig und sind stetig differenzierbar. Für die partiellen Ableitungen der lokalen Ansätze des Vektor- und skalaren Potentials gelten in jedem Element folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\underline{A}}^e}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{A}}_i \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{A}}^e}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{A}}_i \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{A}}^e}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{A}}_i \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\end{aligned} \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\underline{\Phi}}^e}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{\Phi}}_i \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{\Phi}}^e}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{\Phi}}_i \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{\Phi}}^e}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{n^e} \underline{\tilde{\Phi}}_i \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \quad .\end{aligned} \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.8)$$

Die Materialeigenschaften elektrische Leitfähigkeit und Permeabilität werden als elementweise konstant angenommen.

$$\kappa_e(x, y, z) = \text{const.} \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.9)$$

$$\mu_e(x, y, z) = \text{const.} \quad (x, y, z) \in \Omega_e \quad (4.10)$$

Aus den lokalen Näherungsansätzen (4.4) bis (4.6) in den Einzelementen Ω_e werden globale Näherungsansätze für das Gesamtgebiet Ω formuliert.

$$\tilde{\underline{A}}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \underline{\tilde{A}}_i(x_i, y_i, z_i) N_i(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (4.11)$$

$$\tilde{\underline{\Phi}}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \underline{\tilde{\Phi}}_i(x_i, y_i, z_i) N_i(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (4.12)$$

$$\tilde{\underline{J}}_0(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \underline{\tilde{J}}_{0i}(x_i, y_i, z_i) N_i(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (4.13)$$

Darin bedeuten:

n Gesamtzahl der Knotenpunkte im Lösungsgebiet Ω

$N_i(x, y, z)$ globale Formfunktion für den Knotenpunkt i , dabei gilt:

$$N_i(x, y, z) = \begin{cases} N_i^e(x, y, z) & \text{falls } i \text{ Fixpunkt von } \Omega_e \text{ und } (x, y, z) \in \Omega_e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der globale Näherungsansatz (4.11) ist innerhalb des Gesamtgebietes Ω stetig, aber an den gemeinsamen Berührungsflächen zwischen zwei benachbarten finiten Elementen Ω_e nicht stetig differenzierbar. Dennoch können die partiellen Ableitungen des globalen Näherungsansatzes elementweise wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\underline{A}}}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\underline{A}}_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{A}}}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\underline{A}}_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{A}}}{\partial z} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\underline{A}}_i \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{aligned} \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (4.14)$$

Auch für das Skalarpotential werden die partiellen Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\underline{\Phi}}}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\underline{\Phi}}_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{\Phi}}}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\underline{\Phi}}_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{\underline{\Phi}}}{\partial z} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\underline{\Phi}}_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad .\end{aligned} \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (4.15)$$

Da der Grad des Polynomansatzes beim Bilden der ersten partiellen Ableitungen um eine Stufe reduziert wird, entsteht ein numerischer Genauigkeitsverlust. Die Bildung höherer partieller Ableitungen sollte deshalb vermieden werden oder wenn unumgänglich, dann nur in Verbindung mit Polynomansätzen höherer Ordnung als Elementformfunktionen durchgeführt werden.

Für einen gemeinsamen Knotenpunkt i von mehreren aneinandergrenzenden finiten Elementen ergibt sich aus jedem der benachbarten Elemente eine Ableitung. Diese Ableitungen sind im allgemeinen nicht identisch.

Zur Verminderung des numerischen Fehlers beim Differenzieren wird der Mittelwert aus den elementweise verschiedenen partiellen ersten Ableitungen am Knotenpunkt i gebildet. Für die Mittelwertbildung dürfen dabei jedoch nur Elemente mit stetigem Übergang der relativen Permeabilität verwendet werden, in denen die ersten Ableitungen dann theoretisch auch stetig verlaufen müssen.

4.2.2 Integralformulierung des Differentialgleichungssystems

Die globalen Näherungsansätze für das magnetische Vektorpotential (4.11), das skalare Potential (4.12) und die eingeprägte Stromdichte (4.13) werden in die Differentialgleichungen (3.28) und (3.30) eingesetzt. Durch die elementweise Annäherung mit den Polynomfunktionen wird das System der partiellen Differentialgleichungen somit nicht mehr exakt erfüllt. Es resultieren für beide Differentialgleichungen voneinander verschiedene Reste oder Residuen, die vom Ort x, y, z abhängen.

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{\tilde{A}} \right) - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \underline{\tilde{A}} \right) + j\omega \kappa \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa \operatorname{grad} \underline{\tilde{\Phi}} - \underline{\tilde{J}}_0 = \underline{\tilde{R}}_1(x, y, z) \quad (4.16)$$

$$\operatorname{div} \left(-j\omega \kappa \underline{\tilde{A}} - j\omega \kappa \operatorname{grad} \underline{\tilde{\Phi}} \right) = \underline{R}_2(x, y, z) \quad (4.17)$$

Nach der Idee von Galerkin sollen die Residuen innerhalb des Lösungsgebietes minimal werden. Dazu verlangt man, daß das gewichtete Integral der Residuen über das Grundgebiet Ω verschwindet.

Zur Wichtung von Gleichung (4.16) bildet man das Skalarprodukt zwischen dem Residuenvektor und einem Vektorfeld $\underline{\tilde{K}}_j$, das sich aus den räumlichen Komponenten der globalen Gewichtsfunktionen N_j am Knotenpunkt j zusammensetzt.

$$\int_{\Omega} \underline{\tilde{R}}_1(x, y, z) \cdot \underline{\tilde{K}}_j(x, y, z) d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

Die Gleichung für das Vektorfeld $\underline{\tilde{K}}_j$ lautet:

$$\underline{\tilde{K}}_j(x, y, z) = N_j(x, y, z) \underline{\tilde{e}}_x + N_j(x, y, z) \underline{\tilde{e}}_y + N_j(x, y, z) \underline{\tilde{e}}_z \quad (4.19)$$

Das skalare Residuum in Gleichung (4.17) wird direkt mit der Gewichtsfunktion N_j gewichtet und dann die Integration ausgeführt:

$$\int_{\Omega} \underline{R}_2(x, y, z) \cdot N_j(x, y, z) d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.20)$$

Durch die Anwendung des Galerkin-Verfahrens wird das partielle Differentialgleichungssystem (3.28) und (3.30) auf ein Integro-Differentialgleichungssystem mit n voneinander unabhängigen Gleichungen zurückgeführt. Dazu sind zunächst die Residuen in den Gleichungen (4.18) und (4.20) durch die entsprechenden Ausdrücke aus (4.16) und (4.17) zu ersetzen.

$$\int_{\Omega} \left\{ \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{\tilde{A}} \right) - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \underline{\tilde{A}} \right) + j\omega \kappa \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa \operatorname{grad} \underline{\tilde{\Phi}} - \underline{\tilde{J}}_0 \right\} \cdot \underline{\tilde{K}}_j d\Omega = 0 \quad (4.21)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \operatorname{div} \left(-j\omega \kappa \underline{\tilde{A}} - j\omega \kappa \operatorname{grad} \underline{\tilde{\Phi}} \right) \right\} \cdot N_j d\Omega = 0 \quad (4.22)$$

$$j = 1, \dots, n$$

Gleichung (4.21) stellt eine Vektorgleichung dar, die für jede räumliche Komponente x, y, z mit N_j gewichtet wird. Dabei muß das Residuenintegral nach (4.18) nicht nur global, sondern auch in x, y und z -Richtung gesehen, d.h. für jede einzelne Komponente getrennt, zu Null werden. Damit kann Gleichung (4.21) in drei einzelne Gleichungen für die Komponenten aufgesplittet werden. Die Wichtung wird dann mit $N_j \cdot \underline{\tilde{e}}_x$, $N_j \cdot \underline{\tilde{e}}_y$ bzw. $N_j \cdot \underline{\tilde{e}}_z$ durchgeführt, und man erhält insgesamt vier Gleichungen für das Feld:

$$\int_{\Omega} \left\{ \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\underline{\underline{A}}} \right) - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \tilde{\underline{\underline{A}}} \right) + j \omega \kappa \tilde{\underline{\underline{A}}} + j \omega \kappa \operatorname{grad} \tilde{\underline{\underline{\Phi}}} - \tilde{\underline{\underline{J}}}_0 \right\} \cdot N_j \vec{e}_x \, d\Omega = 0 \quad (4.23)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\underline{\underline{A}}} \right) - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \tilde{\underline{\underline{A}}} \right) + j \omega \kappa \tilde{\underline{\underline{A}}} + j \omega \kappa \operatorname{grad} \tilde{\underline{\underline{\Phi}}} - \tilde{\underline{\underline{J}}}_0 \right\} \cdot N_j \vec{e}_y \, d\Omega = 0 \quad (4.24)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\underline{\underline{A}}} \right) - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \tilde{\underline{\underline{A}}} \right) + j \omega \kappa \tilde{\underline{\underline{A}}} + j \omega \kappa \operatorname{grad} \tilde{\underline{\underline{\Phi}}} - \tilde{\underline{\underline{J}}}_0 \right\} \cdot N_j \vec{e}_z \, d\Omega = 0 \quad (4.25)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \operatorname{div} \left(-j \omega \kappa \tilde{\underline{\underline{A}}} - j \omega \kappa \operatorname{grad} \tilde{\underline{\underline{\Phi}}} \right) \right\} \cdot N_j \, d\Omega = 0 \quad (4.26)$$

$j = 1, \dots, n$.

Um die in den Differentialgleichungen (4.23) bis (4.26) noch enthaltenen zweiten partiellen Ableitungen zu eliminieren, werden diese unter Anwendung von den aus der Vektoranalysis bekannten Integralsätzen von Gauß und Green (4.27) bis (4.29) sowie weiterer Rechenregeln in erste Ableitungen transformiert.

Integralsätze für Vektorfelder:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{U} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \vec{U} \, d\vec{\Gamma} \quad (\text{Gaußscher Satz}) \quad (4.27)$$

$$\int_{\Omega} \vec{U} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \operatorname{rot} \vec{U} \, d\Omega - \oint_{\Gamma} (\vec{U} \times \operatorname{rot} \vec{V}) \, d\vec{\Gamma} \quad (4.28)$$

(Greenscher Satz für Vektorfelder)

$$\int_{\Omega} \psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega = - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega + \oint_{\Gamma} (\psi \operatorname{grad} \varphi) \, d\vec{\Gamma} \quad (4.29)$$

(Greenscher Satz für Skalarfelder)

$$\int_{\Omega} \vec{U} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \cdot \operatorname{div} \vec{U} \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \vec{U} \operatorname{div} \vec{V} \, d\vec{\Gamma} \quad (4.30)$$

Rechenregel für Divergenz:

$$\operatorname{div} (\varphi \vec{v}) = \varphi \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} \varphi \quad (4.31)$$

Dabei müssen die betrachteten Funktionen innerhalb des Volumens stetig und auch stetig differenzierbar sein. Diese Bedingung ist aber für die globalen Näherungsansätze von Vektorpotential $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ und skalarem Potential $\tilde{\underline{\underline{\Phi}}}$ zunächst nicht erfüllt. Die globalen Näherungsansätze sind an den Grenzflächen benachbarter Elemente nicht stetig differenzierbar.

Um die Integralsätze dennoch anwenden zu können, wird das Gleichungssystem (4.23) bis (4.26) in die Summe aus den einzelnen Elementintegralen mit elementweise stetigen und stetig differenzierbaren lokalen Näherungsansätzen zerlegt. Somit ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} N_j^e \vec{e}_x \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_e} \text{rot rot } \underline{\tilde{A}} - \frac{1}{\mu_e} \text{grad div } \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa_e \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa_e \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e \right] = 0 \quad (4.32)$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} N_j^e \vec{e}_y \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_e} \text{rot rot } \underline{\tilde{A}} - \frac{1}{\mu_e} \text{grad div } \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa_e \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa_e \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e \right] = 0 \quad (4.33)$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} N_j^e \vec{e}_z \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_e} \text{rot rot } \underline{\tilde{A}} - \frac{1}{\mu_e} \text{grad div } \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa_e \underline{\tilde{A}} + j\omega \kappa_e \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e \right] = 0 \quad (4.34)$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} N_j^e \left\{ -j\omega \kappa_e \text{div} \left(\underline{\tilde{A}} + \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} \right) \right\} d\Omega_e \right] = 0 \quad (4.35)$$

$$j = 1, \dots, n \quad .$$

Nach Anwendung der Integralsätze (4.27) bis (4.30) in jedem einzelnen Element ergibt sich das nachfolgende Gleichungssystem, das nur noch erste partielle Ableitungen enthält.

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (\text{rot } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{rot } N_j^e \vec{e}_x) + \frac{1}{\mu_e} (\text{div } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{div } N_j^e \vec{e}_x) + j\omega \kappa_e N_j^e \vec{e}_x \cdot \underline{\tilde{A}} + \right. \right. \\ \left. \left. + j\omega \kappa_e N_j^e \vec{e}_x \cdot \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - N_j^e \vec{e}_x \cdot \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e - \oint_{\Gamma_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_x \times \text{rot } \underline{\tilde{A}}) \right\} d\vec{\Gamma}_e + \right. \\ \left. - \oint_{\Gamma_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_x \cdot \text{div } \underline{\tilde{A}}) \right\} d\vec{\Gamma}_e \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (\text{rot } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{rot } N_j^e \vec{e}_y) + \frac{1}{\mu_e} (\text{div } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{div } N_j^e \vec{e}_y) + j\omega \kappa_e N_j^e \vec{e}_y \cdot \underline{\tilde{A}} + \right. \right. \\ \left. \left. + j\omega \kappa_e N_j^e \vec{e}_y \cdot \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - N_j^e \vec{e}_y \cdot \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e - \oint_{\Gamma_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_y \times \text{rot } \underline{\tilde{A}}) \right\} d\vec{\Gamma}_e + \right. \\ \left. - \oint_{\Gamma_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_y \cdot \text{div } \underline{\tilde{A}}) \right\} d\vec{\Gamma}_e \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (\text{rot } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{rot } N_j^e \underline{\tilde{e}}_z) + \frac{1}{\mu_e} (\text{div } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{div } N_j^e \underline{\tilde{e}}_z) + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \underline{\tilde{A}} + \right. \right. \\
\left. \left. + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e - \oint_{\Gamma_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \times \text{rot } \underline{\tilde{A}}) \right\} d\vec{\Gamma}_e + \right. \\
\left. - \oint_{\Gamma_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \cdot \text{div } \underline{\tilde{A}}) \right\} d\vec{\Gamma}_e \right] = 0
\end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ j\omega \kappa_e (\underline{\tilde{A}} + \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}}) \cdot \text{grad } N_j^e \right\} d\Omega_e - \oint_{\Gamma_e} \left\{ j\omega \kappa_e (\underline{\tilde{A}} + \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}}) N_j^e \right\} d\vec{\Gamma}_e \right] = 0 \quad (4.39)$$

$j = 1, \dots, n$

Wie in Anhang A1 unter Berücksichtigung von Rand- und Übergangsbedingungen gezeigt wird, heben sich die in Gleichung (4.36) bis (4.39) noch enthaltenen Oberflächenintegrale näherungsweise gegenseitig auf oder sind vernachlässigbar. Als Ergebnis erhält man das folgende Integro-Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (\text{rot } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{rot } N_j^e \underline{\tilde{e}}_x) + \frac{1}{\mu_e} (\text{div } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{div } N_j^e \underline{\tilde{e}}_x) + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_x \underline{\tilde{A}} + \right. \right. \\
\left. \left. + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_x \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - N_j^e \underline{\tilde{e}}_x \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e \right] = 0
\end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (\text{rot } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{rot } N_j^e \underline{\tilde{e}}_y) + \frac{1}{\mu_e} (\text{div } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{div } N_j^e \underline{\tilde{e}}_y) + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_y \underline{\tilde{A}} + \right. \right. \\
\left. \left. + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_y \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - N_j^e \underline{\tilde{e}}_y \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e \right] = 0
\end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (\text{rot } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{rot } N_j^e \underline{\tilde{e}}_z) + \frac{1}{\mu_e} (\text{div } \underline{\tilde{A}}) \cdot (\text{div } N_j^e \underline{\tilde{e}}_z) + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \underline{\tilde{A}} + \right. \right. \\
\left. \left. + j\omega \kappa_e N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} - N_j^e \underline{\tilde{e}}_z \underline{\tilde{J}}_0 \right\} d\Omega_e \right] = 0
\end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ j\omega \kappa_e (\underline{\tilde{A}} + \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}}) \cdot \text{grad } N_j^e \right\} d\Omega_e \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.43)$$

4.2.3 Aufbau des algebraischen Gleichungssystems

Zur Umwandlung des Integro-Differentialgleichungssystems in ein algebraisches Gleichungssystem wird auf die Schreibweise in Komponenten übergangen und die Skalarprodukte aufgelöst.

$$\tilde{\underline{A}}^e = \tilde{\underline{A}}_x \vec{e}_x + \tilde{\underline{A}}_y \vec{e}_y + \tilde{\underline{A}}_z \vec{e}_z \quad (4.44)$$

Aus dem Differentialgleichungssystem (3.17) bis (3.18) erhält man mit (3.19) :

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial y} - \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial x} + \right. \right. \right. \quad (4.45)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e \left(\underline{A}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - N_j^e \underline{J}_{0x} \right\} d\Omega_e \right] = 0$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial z} - \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial y} + \right. \right. \right. \quad (4.46)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e \left(\underline{A}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - N_j^e \underline{J}_{0y} \right\} d\Omega_e \right] = 0$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial z} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial x} - \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial z} + \right. \right. \right. \quad (4.47)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e \left(\underline{A}_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - N_j^e \underline{J}_{0z} \right\} d\Omega_e \right] = 0$$

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ j\omega \kappa_e \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \underline{A}_x + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \underline{A}_y + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \underline{A}_z + \right. \right. \right. \quad (4.48)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} d\Omega_e \right] = 0$$

mit $j = 1, \dots, n$ für Gleichung (4.45) bis (4.48) .

Die in den Gleichungen (4.45) bis (4.48) enthaltenen Komponenten der Näherungsansätze für Vektor- und skalares Potential sowie die Stromdichte können unter Verwendung der Ansätze (4.11) bis (4.15) eliminiert werden. Dadurch sind nur noch die Knotenpunktswerte als einzige unbekannte Größen enthalten. Weil diese Werte nicht ortsabhängig sind, können sie aus der Elementintegration und Summation ausgeklammert werden. Die Knotenpunktsummation wird ganz nach außen gezogen, da das Vertauschen von Integranden und Summanden unter Beachtung

der funktionellen Abhängigkeiten und der geltenden algebraischen Regeln zulässig ist. Auf diese Weise wird das Gleichungssystem (4.45) bis (4.48) verändert in folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{xi} + \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} - \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{yi} + \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} - \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{zi} + \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j\omega \kappa_e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right\} d\Omega_e \right] \underline{\varphi}_i = \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ N_j^e \sum_{i=1}^n J_{0xi} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{xi} + \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{yi} + \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} - \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{zi} + \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j\omega \kappa_e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} d\Omega_e \right] \underline{\varphi}_i = \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ N_j^e \sum_{i=1}^n J_{0yi} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{xi} + \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} - \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{yi} + \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{zi} + \\ & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j\omega \kappa_e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right\} d\Omega_e \right] \underline{\varphi}_i = \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ N_j^e \sum_{i=1}^n J_{0zi} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{xi} + \\
& \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{yi} + \\
& \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e \frac{\partial N_j^e}{\partial z} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \underline{A}_{zi} + \\
& \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) \right\} d\Omega_e \right] \underline{\varphi}_i = 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

mit $j = 1, \dots, n$ für Gleichung (4.49) bis (4.52) .

Die erhaltenen vier Gleichungen (4.49) bis (4.52) bilden ein komplexes algebraisches System mit $4n$ komplexen Unbekannten für das Vektor- und skalare Potential. Durch die Lösung dieses Systems können die Werte für das Vektorpotential und skalare Potential an jedem Knotenpunkt des FEM-Gitters bestimmt werden. Um eine bessere Übersichtlichkeit zu erzielen wird das Gleichungssystem in Matrixschreibweise dargestellt.

$$[U] \cdot \{V\} = \{W\} \tag{4.53}$$

Die Elemente von $[U]$, $\{V\}$ und $\{W\}$ sind Matrizen bzw. Vektoren und lassen sich entsprechend ihrer in den Gleichungen (4.49) bis (4.52) enthaltenen Komponenten wie folgt notieren:

$$U_{ji} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{11} & \underline{u}_{12} & \underline{u}_{13} & \underline{u}_{14} \\ \underline{u}_{21} & \underline{u}_{22} & \underline{u}_{23} & \underline{u}_{24} \\ \underline{u}_{31} & \underline{u}_{32} & \underline{u}_{33} & \underline{u}_{34} \\ \underline{u}_{41} & \underline{u}_{42} & \underline{u}_{43} & \underline{u}_{44} \end{bmatrix}_{ji}, \tag{4.54}$$

Die Matrixkomponenten für U_{ji} sind im Anhang A2 Gleichung (A2.1) bis (A2.16) aufgeführt.

$$V_i = \begin{bmatrix} \underline{A}_x \\ \underline{A}_y \\ \underline{A}_z \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix}_i, \quad W_i = \begin{bmatrix} \underline{W}_x \\ \underline{W}_y \\ \underline{W}_z \\ \underline{W}_\varphi \end{bmatrix}_i \tag{4.55}$$

Im Vektor V_i sind die gesuchten Größen für Vektor- und Skalarpotential enthalten, die an jedem Knotenpunkt i zu ermitteln sind.

Der Vektor W_i enthält nach Gleichung (4.49) bis (4.52) die drei Komponenten für die eingeprägte Stromdichte in x,y und z-Richtung und als vierte Komponente den Wert Null.

$$\underline{W}_x = \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ N_j^e \sum_{i=1}^n N_i^e \underline{J}_{0xi} \right\} d\Omega_e \right] \quad (4.56)$$

$$\underline{W}_y = \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ N_j^e \sum_{i=1}^n N_i^e \underline{J}_{0yi} \right\} d\Omega_e \right] \quad (4.57)$$

$$\underline{W}_z = \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} \left\{ N_j^e \sum_{i=1}^n N_i^e \underline{J}_{0zi} \right\} d\Omega_e \right] \quad (4.58)$$

$$\underline{W}_\varphi = 0 \quad (4.59)$$

Ausgehend von den konkreten Gitternetzkoordinaten sowie den Rand- und Symmetriebedingungen, wie in 3.1.2 dargestellt, für Vektor- und Skalarpotential und eingeprägter Stromdichte, werden entsprechend den Formeln (A2.1) bis (A2.16) die Matrix [U] (4.54) und der Vektor {W} aufgebaut. Die gesuchte Größe ist dabei der Vektor {V}, mit den für jeden einzelnen Knotenpunkt zu berechnenden drei Komponenten Vektorpotential ($\underline{A}_x, \underline{A}_y, \underline{A}_z$) und in den leitfähigen Bereichen zusätzlich dem skalaren Potential $\underline{\varphi}$ als vierter Komponente.

Da jede von den vier Komponenten entsprechend den in Kapitel 3.1 getroffenen Voraussetzungen einen komplexen Charakter hat, müssen in den leitfähigen Gebieten für jeden Knotenpunkt acht Unbekannte ermittelt und somit auch in der Matrix reserviert werden. In den Luftgebieten weist das Gleichungssystem dagegen nur 3 komplexe Unbekannte auf, da kein skalares Potential vorliegt. Als Ergebnis der Matrizenformierung erhält man eine in ihrer Struktur dünn besetzte, diagonalendominante Bandmatrix, die außerdem symmetrisch ist.

4.3 Lösungsverfahren für algebraische Gleichungssysteme

Für Gleichungssysteme mit der o.g. Bandstruktur wurden in den letzten beiden Jahrzehnten eine Vielzahl an Lösungsalgorithmen entwickelt. An dieser Stelle sollen im Folgenden nur die existierenden Grundprinzipien erwähnt werden.

Der Umfang für die FEM-Matrix kann bei hohen erforderlichen Knotenpunktzahlen im Gitternetz sehr schnell sehr groß werden. So sind z.B. bei ca. 200.000 komplexen Knotenvariablen bereits etwa 1,6 Millionen Hauptdiagonalelemente erforderlich. Damit können direkte Lösungsverfahren aufgrund des hohen Speicherbedarfs für die Berechnung nicht mehr eingesetzt werden. Es kommen praktisch nur iterative Lösungsverfahren in Frage, bei denen sich die Matrix nur teilweise im Hauptspeicher befindet. Als hauptsächlich angewendetes, bewährtes iteratives Verfahren gelangt neben dem *Gauss-Seidel*-Verfahren die Methode der konjugierten Gradienten zum Einsatz.

Ein einfacher konjugierte-Gradienten-Algorithmus wurde bereits in [LÜDT90] für die FEM-Vektorpotentialfeldberechnung eingesetzt. Nachteilig bei diesem Gradientenverfahren ohne Vorkonditionierung ist aber der hohe Rechenzeitaufwand. Mit Knotenpunktzahlen von ca. 100.000 FEM-Knoten ergaben sich für das Rinnenofenproblem in Kapitel 6 Rechenzeiten von etwas über drei Wochen auf einer HP-Apollo 9000, Serie 700 Workstation mit 128 Mbyte Hauptspeicher.

Für schnellere Konvergenz und kürzere Rechenzeit mußte das konjugierte Gradientenverfahren um eine geeignete Vorkonditionierung der Systemmatrix erweitert werden. Deshalb wurde das ICCG-Lösungsverfahren mit unvollständiger *Cholesky*-Zerlegung (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) [KOST94] angewendet.

Das System (4.53)

$$[U] \cdot \{V\} - \{W\} = 0 \quad (4.60)$$

wird mit der *Cholesky*-Zerlegung $[C] = [L] \cdot [L]^T$ bzw. $[C]^{-1} = ([L] \cdot [L]^T)^{-1}$
(Matrix L ist die untere n x n Dreiecksmatrix)

$$[C]^{-1}[U] \cdot \{V\} - [C]^{-1}\{W\} = 0 \quad (4.61)$$

$$([L] \cdot [L]^T)^{-1}[U] \cdot \{V\} - ([L] \cdot [L]^T)^{-1}\{W\} = 0 \quad (4.62)$$

transformiert in

$$[L]^{-1}[U]([L]^T)^{-1} \cdot \{V\}' - \{W\}' = 0 \quad (4.63)$$

$$\text{mit } \{V\}' = [L]^T \{V\} \text{ sowie } \{W\}' = [L]^{-1}\{W\} \quad (4.64)$$

und kann dann iterativ wie nachfolgend beschrieben gelöst werden [MEIJ77], [KERS78].

Mit der Anfangslösung $\{x_o\}$ wird der Anfangsrest $\{r_o\}$ und daraus die Anfangssuchrichtung $\{p_o\}$ ermittelt.

$$\{r_o\} = \{W\} - [U] \cdot \{x_o\} \quad ; \quad \{p_o\} = ([L] \cdot [L]^T)^{-1} \cdot \{r_o\} \quad (4.65)$$

Für $i=0,1,\dots,n$ werden folgende Iterationsschritte bis zum Erreichen der Abbruchgenauigkeit $\{x_{i+1}\} - \{x_i\} \leq \varepsilon$ vollzogen

$$\alpha_i = \frac{(r_i, ([L] \cdot [L]^T)^{-1} \cdot r_i)}{(p_i, [U] \cdot p_i)} \quad ; \quad \{x_{i+1}\} = \{x_i\} + \alpha_i \{p_i\} \quad (4.66)$$

$$\{r_{i+1}\} = \{r_i\} - \alpha_i [U] \{p_i\} \quad ; \quad \beta_i = \frac{(r_{i+1}, ([L] \cdot [L]^T)^{-1} \cdot r_{i+1})}{(r_i, ([L] \cdot [L]^T)^{-1} \cdot r_i)} \quad (4.67)$$

$$\{p_{i+1}\} = ([L] \cdot [L]^T)^{-1} \cdot \{r_{i+1}\} + \beta_i \{p_i\} \quad (4.68)$$

Die Rechenzeit sinkt bei Anwendung des ICCG-Verfahrens für das Rinnenofenproblem um den Faktor 3 bis auf ca. eine Woche unter Verwendung der HP-Workstation.

Als weitere Lösungsverfahren sollen die SSORCG-Methode (Symmetric Successive OverRelaxation Conjugate Gradient) und das ILUBiCG-Verfahren (Incomplete LU-Decomposition, BiConjugate Gradient), das für asymmetrische Matrizen eingesetzt werden kann, nur erwähnt werden [KOST94].

In [MEIJ77] werden das SIP- (Strongly Implicite Procedure) und SLOR- (Successive Line OverRelaxation) Verfahren mit dem CG- (Conjugate Gradient) und ICCG-Verfahren verglichen.

5. Numerische Voruntersuchungen

Bevor der Rinnenofen in seiner ganzen Komplexität berechnet wird, sind einige Voruntersuchungen notwendig. Ziel der Voruntersuchungen ist die Reduzierung des numerischen Aufwandes für die spätere Rinnenofenberechnung unter Einhaltung einer ausreichenden numerischen Rechengenauigkeit. Während der Voruntersuchungen sind dabei folgende das Rechenergebnis beeinflussende Faktoren abzuklären:

1. Welche Vernetzungsdichte (Element- und Knotenpunktzahl im Lösungsgebietvolumen) ist erforderlich ?
2. Wie weit muß die Lösungsgebietberandung vom aktiven Feldgebiet entfernt sein ?
3. Welche Randbedingung ermöglicht ein kleineres Lösungsgebiet ?
4. Kann für die Berechnung eine konstante relative Permeabilität μ_r im Magnetleiter eingesetzt werden ?

An das Untersuchungsobjekt werden folgende Anforderungen gestellt:

- a) Am Untersuchungsmodell bleibt die Grundähnlichkeit zum Originalobjekt bestehen. Alle Hauptkonstruktionselemente vom Rinnenofen sind im Modell enthalten.
- b) Es ist nur ein dreidimensionales Modell sinnvoll, das aber räumlich kleiner als der Originalrinnenofen sein sollte
- c) Die Anordnung soll in ihrer Konfiguration möglichst einfach sein.
- d) Der numerische Gesamtaufwand muß im Vergleich zur Rinnenofenberechnung niedrig ausfallen.
- e) Bei der Vernetzung ist auf gleichmäßige Kantenlängen der finiten Elemente zu achten.

Entsprechend den Anforderungen a) bis e) wird für die Voruntersuchungen ein einloopiges Rinnenofenmodell verwendet. Im Modell treten keine schrägen Gehäuseteile auf. Als Elemente werden Quaderelemente mit Polynomansatz 1.Ordnung eingesetzt.

5.1 Beschreibung der Modellanordnung

Das Modell enthält entsprechend den Ähnlichkeitsanforderungen in a) dieselben wirbelstrombehafteten Konstruktionselemente wie der Induktionsrinnenofen. Somit werden Induktor, Kühlzylinder, Rinne und Ofengehäuse und das umgebende Luftgebiet für die Berechnung modelliert.

Die Abmessungen nach Bild 5.1 und 5.2 sind dabei so gewählt, daß eine möglichst gleichmäßige Unterteilung in finite Elemente in x-,y-,z-Richtung erreicht werden kann. Dadurch sollen numerische Ungenauigkeiten bei der Elementintegration verringert werden.

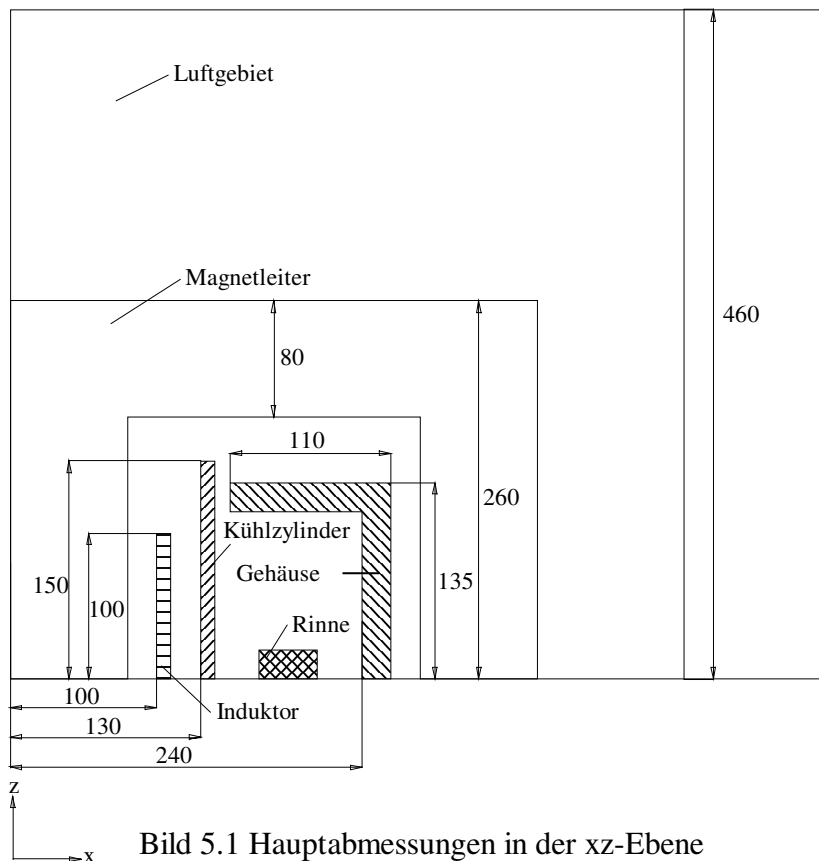


Bild 5.1 Hauptabmessungen in der xz-Ebene

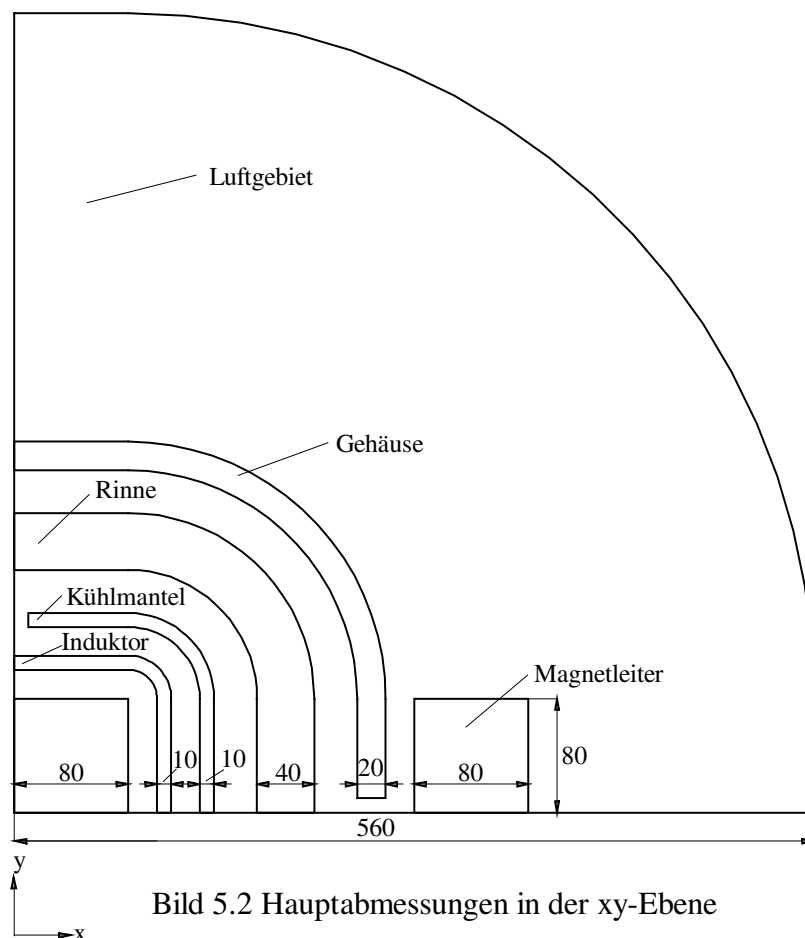


Bild 5.2 Hauptabmessungen in der xy-Ebene

Die Berechnung erfolgt bei Netzfrequenz mit sinusförmiger Erregung nach den in Abschnitt 3.1 eingeführten Voraussetzungen bei induktiver Erwärmung. Als Material wurde für Induktor und Kühlzylinder analog zum Rinnenofen Kupfer gewählt. Die Schmelze besteht aus einer Kupferlegierung.

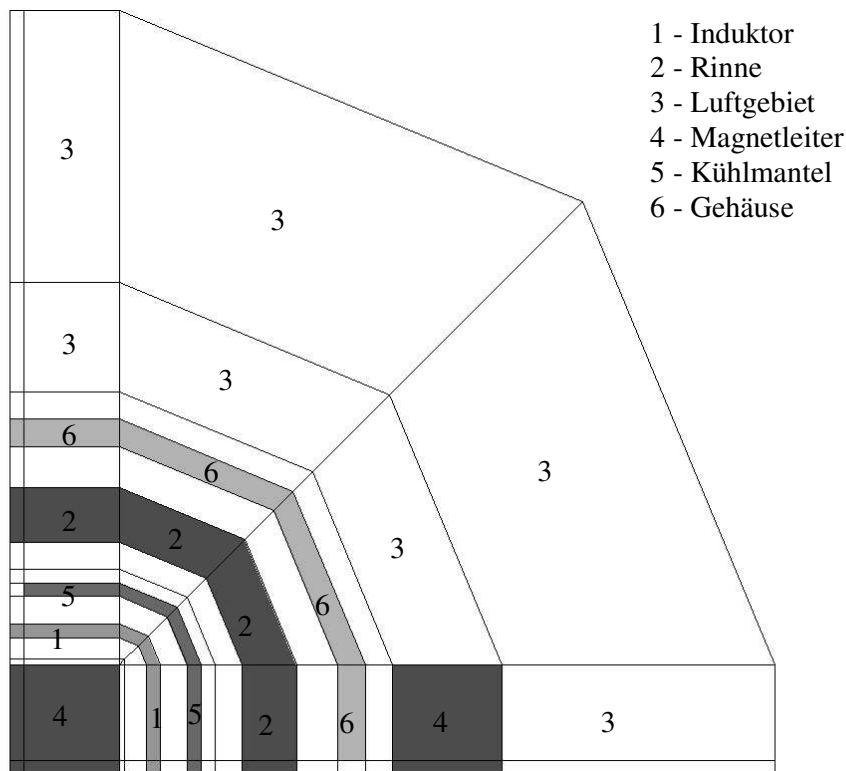
Bevor die numerische Berechnung beginnt, ist das Lösungsgebiet nach Bild 5.1 und Bild 5.2 in finite Elemente aufzuteilen. Bewährt hat sich dabei das Makroelementkonzept [AND89].

Als Grundlage für den Aufbau eines dreidimensionalen Makroelementenetzes ist zunächst ein zweidimensionales Makronetz erforderlich.

Zweckmäßigerweise wird die Startebene für das 2D-Makrogrid in die xy-Symmetrieebene vom Modell gelegt.

Die Hauptelemente mit den Abmessungen nach Bild 5.2 werden in wenige 2D-Makroelemente grob diskretisiert. Dabei wird jedem Material eine neue Gebietskennziffer zugewiesen. Als Ergebnis entsteht das 2D-Makronetz in Bild 5.3.

Dieses ebene Netz enthält bereits alle charakteristischen Gebiete und Hauptbestandteile des späteren 3D-Makroelementnetzes. Es bildet die Ursprungsschicht für den weiteren Netzaufbau.



- 1 - Induktor
- 2 - Rinne
- 3 - Luftgebiet
- 4 - Magnetleiter
- 5 - Kühlmantel
- 6 - Gehäuse

Das dreidimensionale Makroelementenetz kann anschließend sehr einfach durch schichtweises Übereinanderstapeln der zweidimensionalen Ursprungsmakroschichten aufgebaut werden. Die Schichtung erfolgt dabei vom Boden nach Oben. Alle neuen Schichten weisen dieselbe Knotenpunkt- und Elementanzahl wie die Grundschicht auf. Die Gebietskennziffern können in allen Schichten für jedes beliebige Makroelement neu eingetragen werden. Das Eintragen der Gebiete erfolgt in Abhängigkeit von der z -Koordinate.

Bild 5.3 Zweidimensionales Makronetz in der xy -Ebene, $z=0$

So z.B. wird die Kennziffer 1 für den Induktor nur bis zu einer Höhe von $z=z_1$ in die jeweiligen Makroelemente eingetragen. In den darüberliegenden Makroelementenschichten mit $z > z_1$, d.h. dort wo der Induktor zu Ende ist, wird dann die Kennziffer 3 für Luft eingesetzt.

Auf diese Weise wird es möglich, die dreidimensionale Geometrie aller Bauteile im Lösungsgebiet nachzubilden.

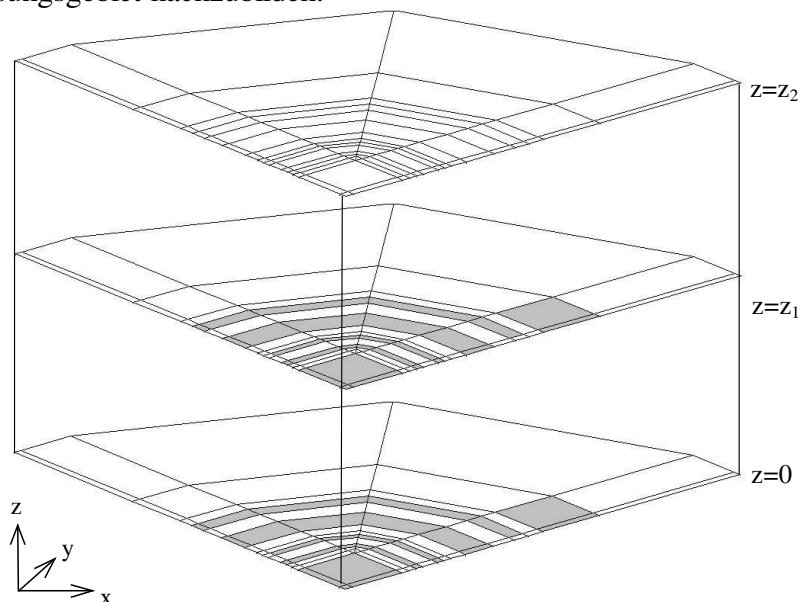


Bild 5.4 Dreidimensionale Makroelementenschichtung

Für die Berücksichtigung geschrägter Teile, wie dem Gehäuse, werden einzelne Makroelementknoten gezielt in z -Richtung, z.B. aus der Ebene $z=z_1$ nach Oben bis $z=z_1+\Delta z$ verschoben.

Bei der Verknüpfung zum dreidimensionalen Makronetz werden aus den Viereckmakroelementen Hexaederelemente erzeugt. Dazu entstehen aus jeweils an derselben x -, y -Position übereinanderliegenden Vierecken die Unterseiten- und

Oberseitenflächen für die neuen Hexaederelemente. Die verbleibenden Quaderseitenflächen vorn und hinten sowie rechts und links erhält man durch Verbinden der jeweiligen Viereckseitenkanten aus der unteren Schicht mit den zugehörigen Seitenkanten in der darüberliegenden Schicht.

Es werden in jedem Makro immer die beiden Punkte einer Viereckseite mit den in derselben x-, y-Position darunter liegenden Punkten verbunden.

Die Gebietskennziffern für die Hexaederelemente, welche die Materialeigenschaften symbolisieren, werden für eine bestimmte Schicht aus den Vierecken in der darüberliegenden Schicht übernommen. Für die Vorder- und Rückseiten sowie die rechten und linken Seitenflächen in den Hexaedermakros werden die Ziffern für Randbedingungen direkt aus den Ursprungsvierecken übernommen. Die Randbedingungs-ziffern an den Ober- und Unterseiten in den Hexaedern werden komplett neu eingetragen. Auch die Kennzahlen für die Anzahl Unterteilungen und Teilungsverhältnisse aus den zweidimensionalen Viereckmakros werden in die Hexaedergrobstruktur mit übergeben. Ebenso werden die Art der zu generierenden finiten Elemente und die zugehörige Polynomansatzkennziffer in die Hexaedermakros eingetragen.

Am Ende der Verknüpfung erhält man aus den nach Bild 5.4 übereinanderliegenden Makroelementschichten das fertige dreidimensionale Hexaedermakronetz in Bild 5.5. Für die durchzuführende Feldberechnung werden folgende Rand- und Symmetriebedingungen (siehe Abschnitt 3.1.2) für das kombinierte Vektor-Skalarpotential in dieses Makrogitter eingetragen:

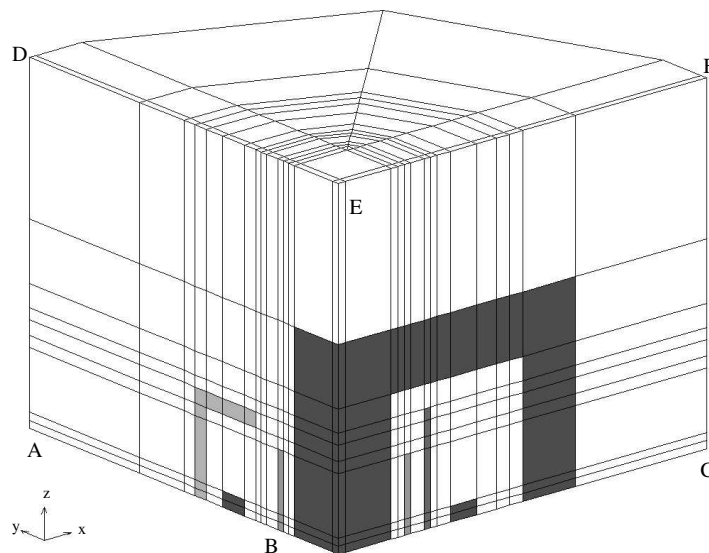


Bild 5.5 Dreidimensionales Makroelementnetz

1. Außenrandflächen **DEF** und **ACFD**

a) $\vec{A} = \vec{0}$ bzw.

b) $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$ und $\frac{\partial(\vec{A} \times \vec{n})}{\partial n} = 0$

2. BH-Feld Symmetrieffläche **ABC**

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = 0, \quad \frac{\partial(\vec{A} \times \vec{n})}{\partial n} = 0$$

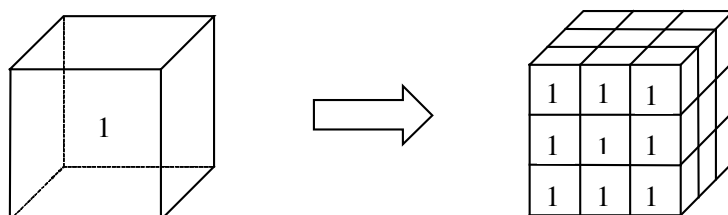
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ für } \kappa > 0$$

3. Symmetrieebene **ABED** und **BCEF**

$$\vec{A} \times \vec{n} = 0 \text{ und}$$

$$\varphi = 0 \text{ für } \kappa > 0$$

Jetzt kann das fertige Hexaedermakronetz, das alle notwendigen Informationen über Gebietszuordnung, Randbedingungen, Elementgeometrie und die Teilungsverhältnisse für die Zerlegung enthält, in finite Elemente verfeinert werden. Dies geschieht nach dem in Bild 5.6 gezeigten Prinzip. Aus einem Hexaeder, in diesem Fall Würfel, entstehen z.B. durch dreifache Unterteilung in x-, y- und z-Richtung insgesamt 27 finite Elemente in Hexaederform. Im dargestellten Fall füllen die 27 Würfel genau das Ursprungsvolumen aus.



$$V_{\text{Mak}} = \sum_{\text{el}=1}^n V_{\text{el}} \quad ; \quad n = 27$$

$$\text{Gebiet} = 1$$

Bild 5.6 Zerlegung eines Quadermakroelementes in 27 finite Quaderelemente

Bei krummlinigen Begrenzungen approximieren die groben Makroelemente jedoch die Geometrie nur näherungsweise durch Geradenstücke. Erst bei der FE-Zerlegung werden die Bögen durch Parabeln genauer erfaßt.

Nach der Finite-Elemente-Zerlegung liegt das fertige Gitternetz für die dreidimensionale Feldberechnung vor. Alle Informationen über Randbedingungen, Gebietszuordnungen, Elementtypen und -geometrien wurden dabei aus den Hexaedermakros in jedes einzelne finite Element übermittelt. Bild 5.7 zeigt als Beispiel das fertige aus dem Makronetz in 5.5 entstandene Oberflächengitternetz mit insgesamt 128.075 finiten Hexaedern. Im Netz sind die Konstruktionselemente Induktor, Rinne, Magnetjoch, Kühlzylinder und Gehäuse berücksichtigt.

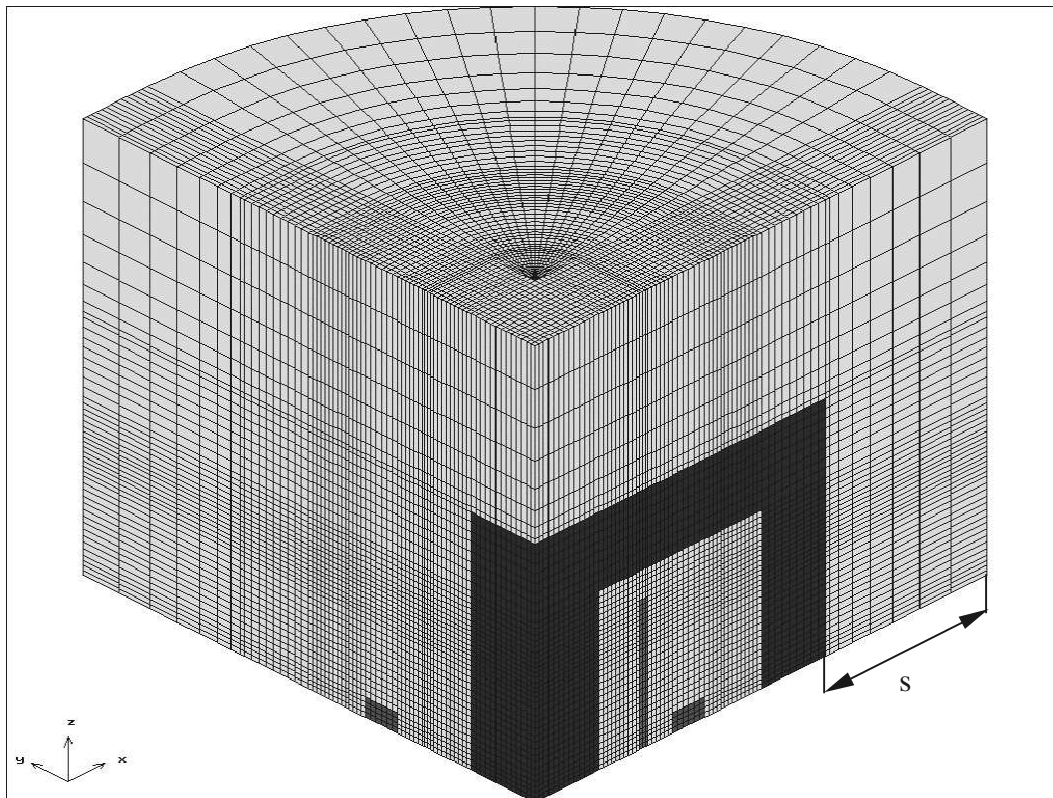


Bild 5.7 Finites Elementenetz für die Modellordnung mit 128.075 Elementen

Zur besseren Veranschaulichung wird mit Bild 5.8 das Finite-Elemente-Netz am Beispiel einer Vernetzung mit 241.920 Hexaedern nur für die Konstruktionsteile ohne umgebendes Luftgebiet gezeigt.

5.2 Variantenrechnungen

Um Anhaltspunkte für ein minimales Lösungsgebiet mit kleinstmöglicher Element- und Knotenzahl aufzufinden und die Wirbelstrom- und Verlustberechnung dennoch ohne Genauigkeitseinbuße durchführen zu können, sind im Einzelnen folgende funktionale Zusammenhänge zu untersuchen:

- 1) Abhängigkeit der Wirbelstromverluste von der Vernetzungsdichte im aktiven Feldgebiet, das alle wirbelstrombehafteten Bauteile sowie den Magnetleiter enthält (siehe Bild 5.8), und im Gesamtlösungsgebiet. Das Lösungsgebietvolumen wird nicht verändert.

- 2) Zusammenhang zwischen Randflächenabstand zum aktiven Feldgebiet und Verlustleistung bei konstanter Vernetzungsdichte im aktiven Feldgebiet.
- 3) Einfluß von Randbedingungen für das numerische Vektorpotential \vec{A} (Neumann und Dirichlet) auf den Außenrandflächen bezüglich der Verlusthöhe. Der Randabstand wird variiert. Die Vernetzungsdichte im aktiven Feldgebiet ist konstant.
- 4) Abhängigkeit der Wirbelstromverluste von der relativen Permeabilität μ_r im Magnetjoch. Die Nichtlinearität von μ_r wird vernachlässigt. Das Lösungsgebietsvolumen, die Vernetzungsdichte und der Randabstand zum aktiven Feldgebiet bleiben konstant.

Die Berechnungen 1) bis 4) am einloopigen Modell werden mit folgenden elektrischen Eingabedaten und Materialeigenschaften durchgeführt:

elektrische Daten: Arbeitsfrequenz $f = 50 \text{ Hz}$
 Eingeprägter Strom $I = 2500 \text{ A}$
 Windungszahl $W = 10 \text{ Windg.}$

Materialeigenschaften: Induktor, Cu : $\kappa_1 = 5,6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_{r1} = 1$
 Rinne, K21 : $\kappa_2 = 4,5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, $\mu_{r2} = 1$
 Luft : $\kappa_3 = 0 \text{ S/m}$, $\mu_{r3} = 1$
 Magnetleiter : $\kappa_4 = 0 \text{ S/m}$, $\mu_{r4} = 1000$ 1) bis 3)
 Kühlzylinder : $\kappa_5 = 5,6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_{r5} = 1$
 Gehäuse : $\kappa_6 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, $\mu_{r6} = 1$

5.2.1 Verfeinerung des Gesamtgitters im Lösungsgebiet

Um die Abhängigkeit der Wirbelstromverluste von der Vernetzungsdichte zu untersuchen, wird im Lösungsgebiet mit konstantem Randabstand $s = 200 \text{ mm}$ (siehe Bild 5.7) und konstantem Volumen V die Elementdichte $\rho_{EL_{Akt}}$ im aktiven und die Elementdichte $\rho_{EL_{Ges}}$ im Gesamtlösungsgebiet variiert. Dies erfolgt durch die Erhöhung der Teilungszahlen u_x, u_φ, u_z für die Makroelemente, wie in Tabelle 5.1 angegeben ist.

Var	Σu_x	Σu_φ	Σu_z	anze	anzk	anze _{Akt}	$\rho_{EL_{Akt}}$ in EL/cm ³	$\rho_{EL_{Ges}}$ in EL/cm ³
V1	34	10	22	13 310	14 835	11 110	0,36	0,11
V3	54	16	35	53 200	57 024	45 040	1,46	0,44
V4	68	20	44	105 600	111 600	88 000	2,85	0,87
V5	69	20	47	128 075	134 832	104 890	3,40	1,06
V6	82	32	54	241 920	251 845	197 376	6,40	1,99

Tabelle 5.1 Varianten mit Erhöhung der Elementdichte bei konstantem Volumen

Das in Bild 5.8 abgebildete aktive Lösungsgebiet beinhaltet die wirbelstromführenden Bauteile und den Magnetleiter.

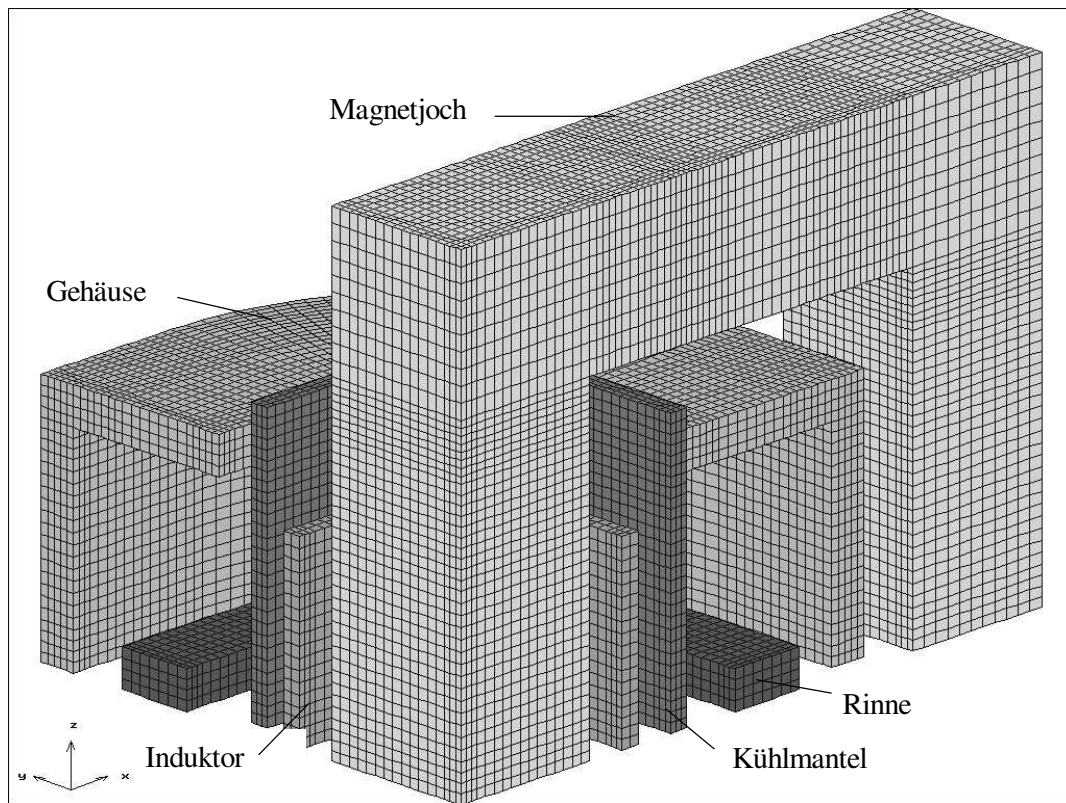


Bild 5.8 Finites Elementenetz für die Modellanordnung V6 mit 241.920 Hexaedern

Das Gitternetz lt. Bild 5.8 enthält in der xy-Ebene 4480 2D-Elemente und 4.579 2D-Knoten.

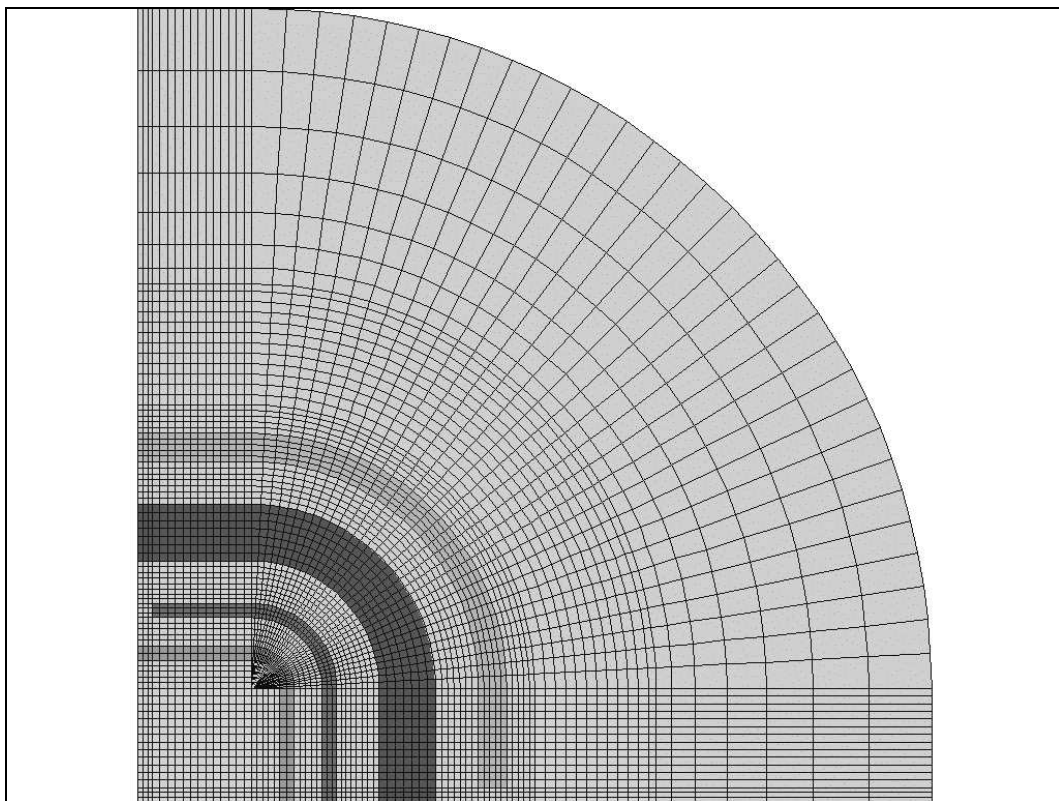


Bild 5.9 2D-Diskretisierung des Lösungsgebietes in der xy- Ebene

Mit dem Gitternetz in Bild 5.8 wird für Variante V6 als Ergebnis der Feldberechnung folgender Stromdichteverlauf auf der Kühlmanteloberfläche ermittelt:

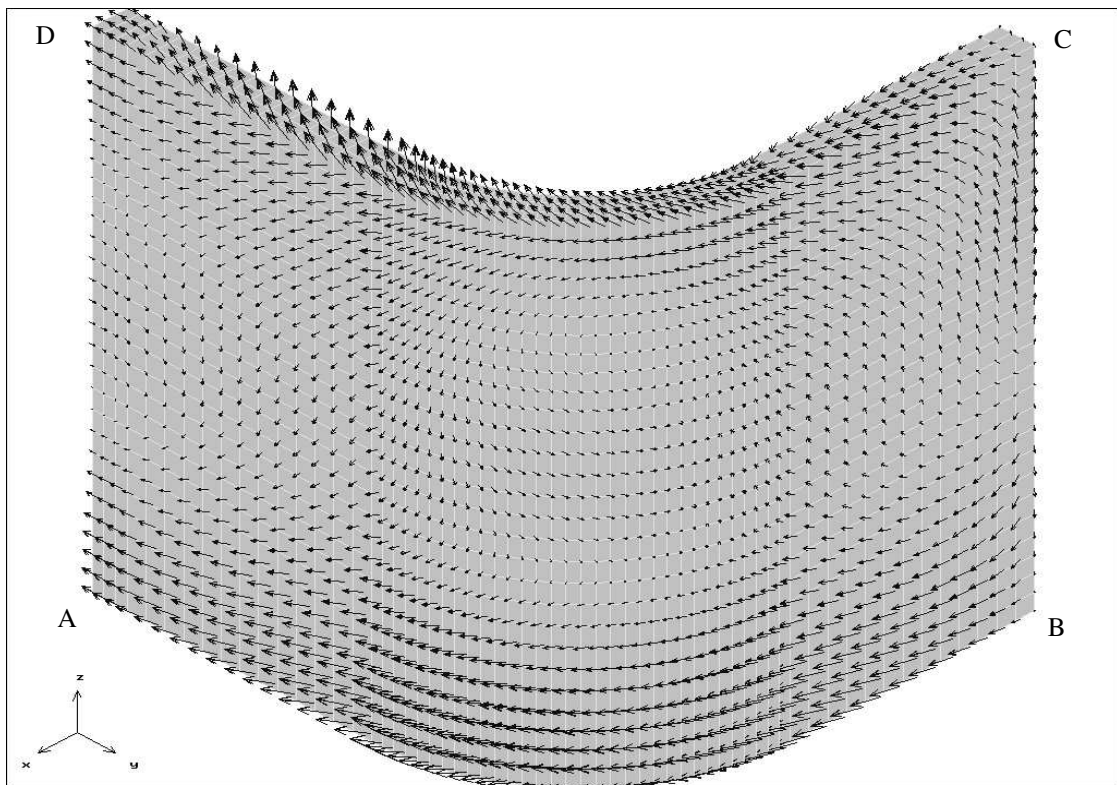


Bild 5.10 Realteil der Stromdichte auf der Kühlmanteloberfläche

Der Strom fließt auf der Rückseite vom Kühlmantel von A nach B und von D nach C, teilt sich entlang der am Spalt liegenden Kante AB nach Oben und Unten, um dann auf der Vorderseite von B nach A und C nach D zurückzufließen.

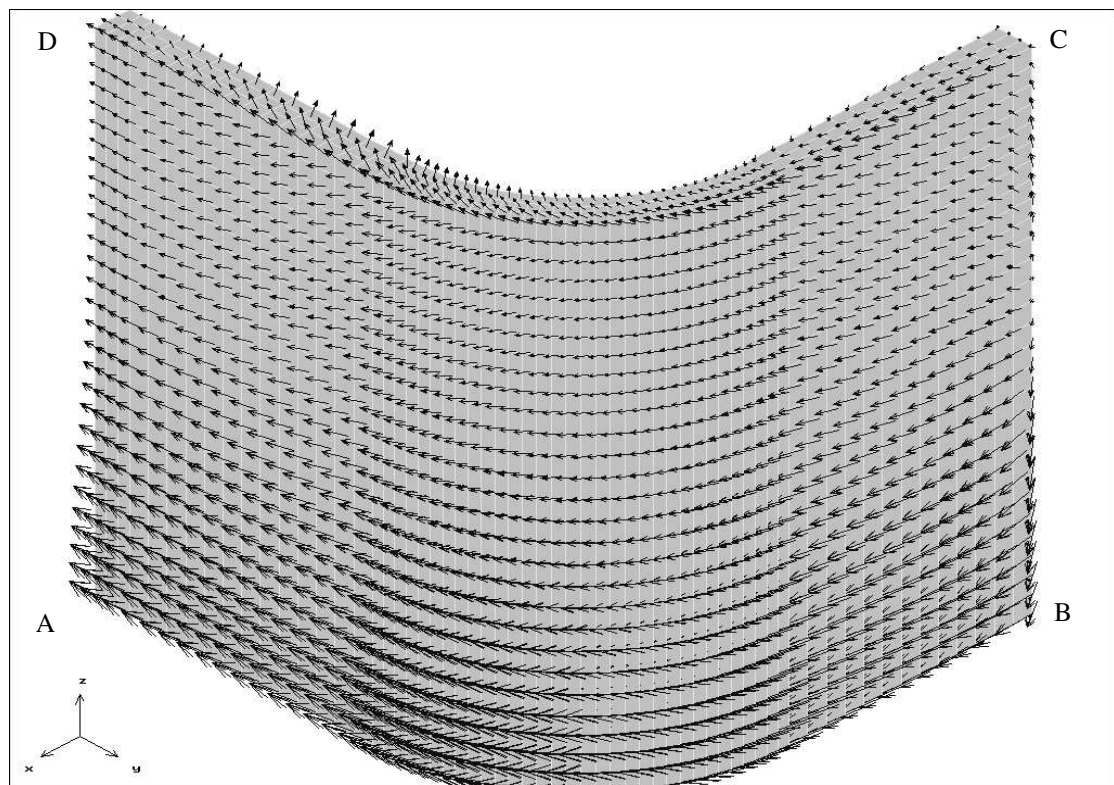


Bild 5.11 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlmanteloberfläche

Auf der Gehäuseoberfläche ergeben sich für die Anordnung V6 folgende Stromverläufe:

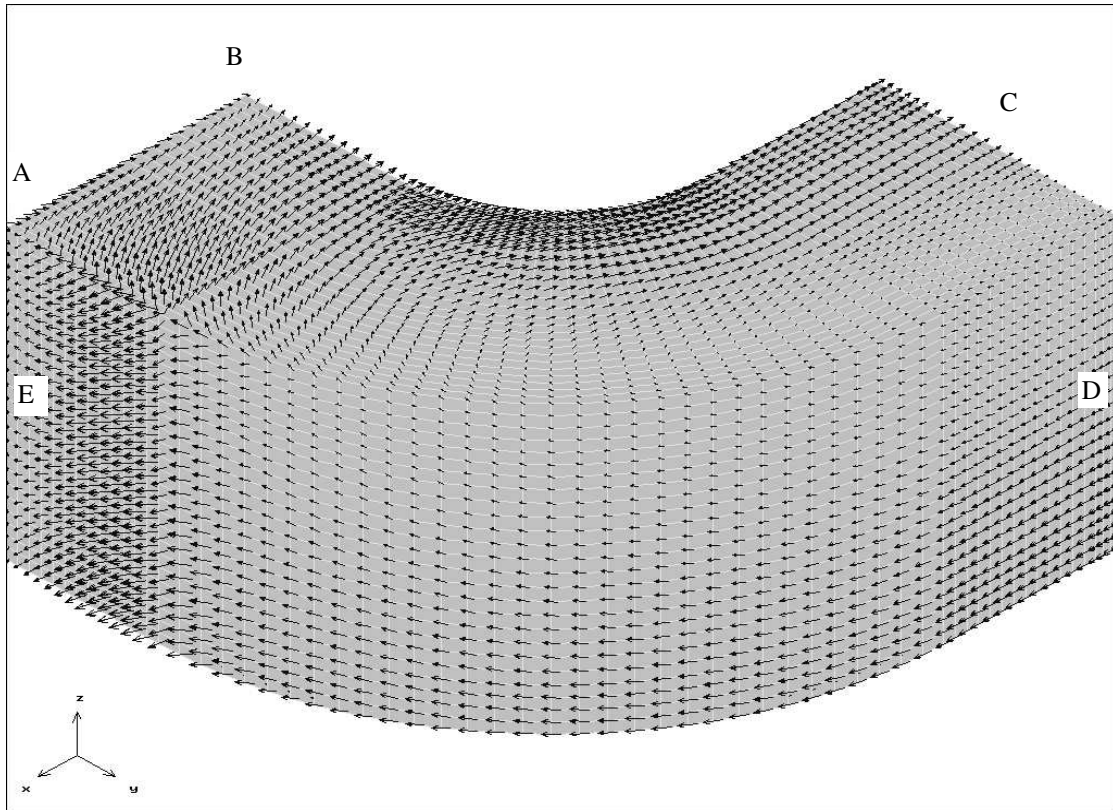


Bild 5.12 Realteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche

Der Strompfad verläuft auf der Gehäusevorderseite von D nach E und geht dann weiter über die am Gehäusespalt liegende Seite AB auf der Gehäuseoberseite in Richtung C.

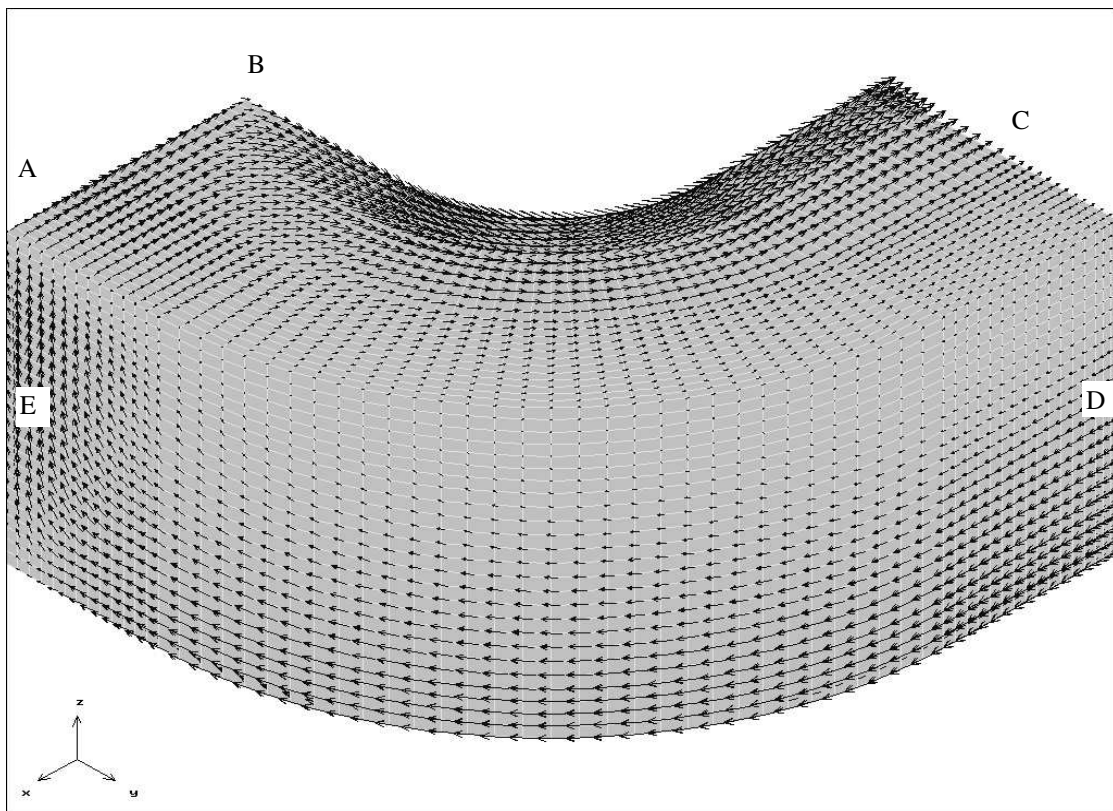


Bild 5.13 Imaginärteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche

Für die Wirbelstromverteilungen aus Variante V1 bis V6 wurden nach Gleichung (3.53) die Verlustleistungen berechnet. Es ergaben sich folgende Werte in Abhängigkeit von der Elementdichte ρ_{ELAkt} :

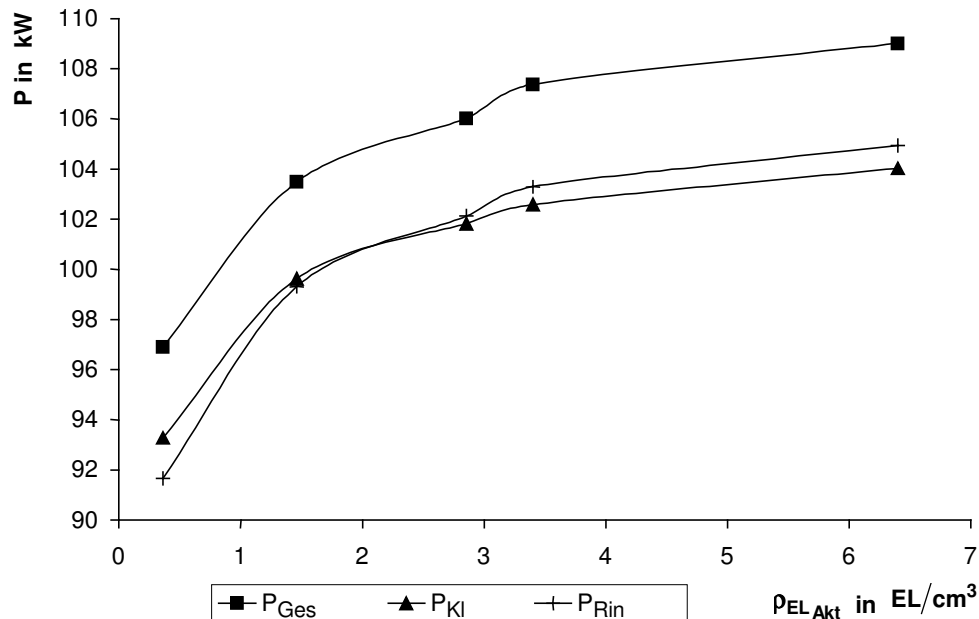


Bild 5.14 Wirkleistung in der Rinne, an den Klemmen und Gesamtwirkleistung

Zusätzlich zu den Wirkleistungen wurden mit Formel (3.55) die Blindleistungen berechnet.

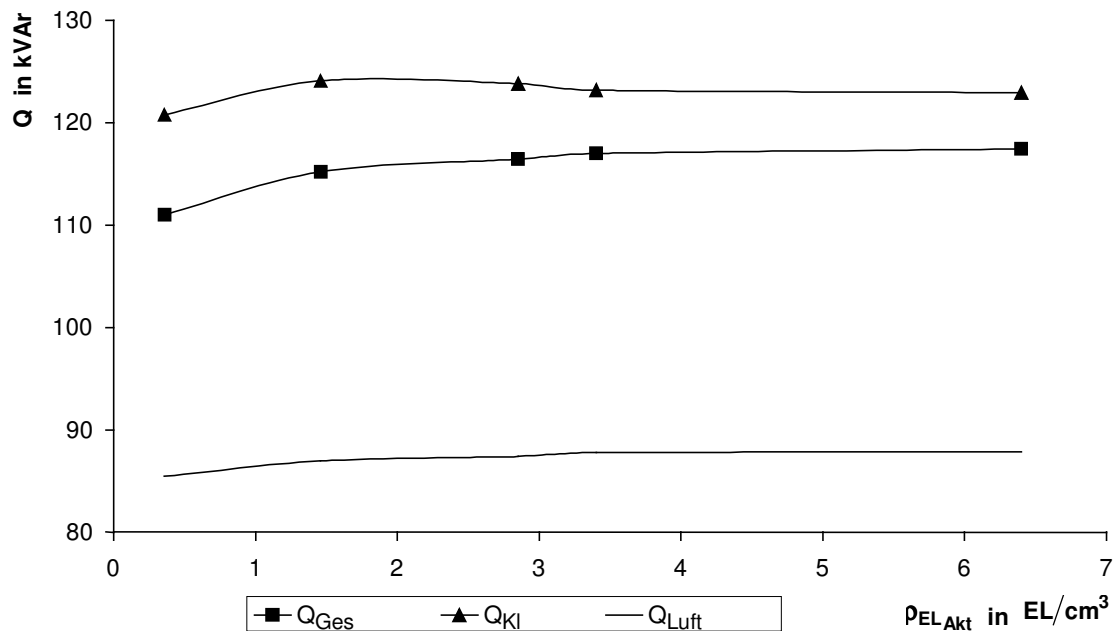


Bild 5.15 Blindleistung in der Luft, an den Klemmen und Gesamtwirkleistung

Die Klemmen-Wirk- und Klemmen-Blindleistungen wurden durch Integration aus den Vektorpotentialwerten am Induktor berechnet.

Alle Zahlenwerte zu 5.14 und 5.15 sowie weitere Grafiken mit den Verläufen von Wirk- und Blindleistung in Rinne und Gehäuse sind in Anhang A3 enthalten.

Für die Varianten V1 bis V6 ergibt sich mit dem ICCG-Verfahren nach 4.3 ein Rechenzeitaufwand von 0,2 bis 6,6 Tagen auf der HP-Workstation.

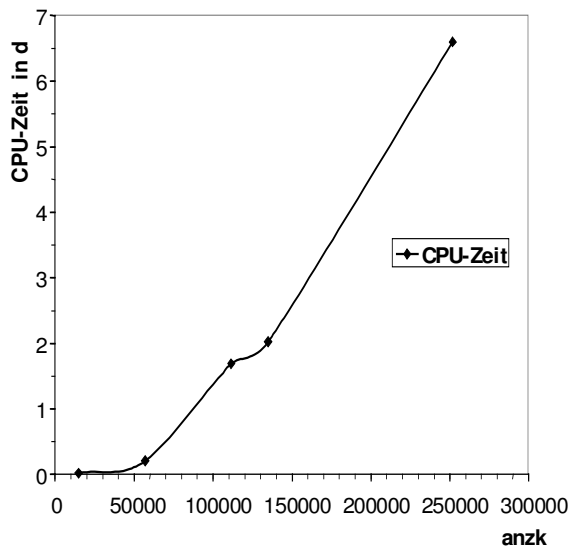


Bild 5.16 Rechenzeit als Funktion der Knotenpunktzahl (anzk)

Die Untersuchung zur Gitternetzverfeinerung zeigt, daß die interessierende Wirkleistung in Abhängigkeit der Elementdichte ansteigt (Diagramm Bild 5.14). Es müßten folglich Rechnungen mit noch größerer Knotenpunktanzahl durchgeführt werden. Eine Knotenpunktanzahl größer 110.000 war mit dem vorhandenen HP-Rechner aufgrund der Rechengeschwindigkeit unreal, wie Bild 5.16 zeigt. Daher wurden die Variantenrechnungen für den Rinnenofen mit der Knotenpunktanzahl 110.000 geführt.

Die Verhältnisse der einzelnen Wirkleistungen in Rinne, Kühlzylinder und Gehäuse scheinen sich nur unwesentlich mit der Knotenpunktanzahl zu ändern, wie in Anhang A3 in Tabelle A3.2 und Tabelle A3.3 ersichtlich ist.

Für die Bestimmung der Klemmenleistung wird die Klemmenspannung am Induktor aus dem Linienintegral über die elektrische Feldstärke bisher nur zweidimensional berechnet. Diese Vereinfachung verursacht die Abweichung zwischen der berechneten Klemmenleistung und der durch Volumenintegration ermittelten Gesamtleistung. Der Anteil des im Induktor rückwirkend induzierten Feldes wird nicht vollständig erfaßt. Die Klemmenleistung ist kleiner im Vergleich zur Gesamtleistung.

5.2.2 Verschiebung des äußeren Randes bei Randbedingung $\vec{A} = 0$ und $\vec{A}_n = 0$

Nach den Berechnungen mit Variation der Gitternetzdicke, werden Variantenrechnungen mit Verschiebung des äußeren Randes durchgeführt, Bild 5.17 veranschaulicht dies.

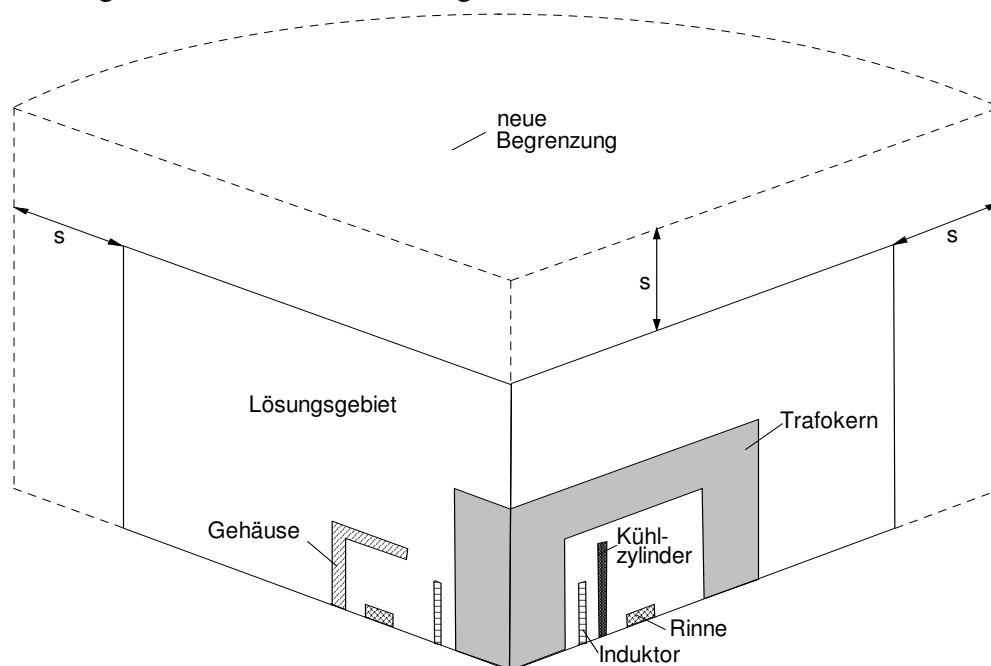


Bild 5.17 Variation des äußeren Randabstandes im Lösungsgebiet

Die Gitternetzdicke im aktiven Feldgebiet, das bis zur Länge L_{akt} reicht (Bild 5.18), entspricht für alle Varianten mit Randabstandvergrößerung dem unter 5.2.1 für Variante V3 angegebenen Wert. Die Gesamtelementdicke ρ_{ELGes} sinkt jedoch mit zunehmendem Randabstand s . Neben der Gitternetzdicke ρ_{ELAkt} bleiben auch alle Seitenlängen (Breite, Höhe, Tiefe) der finiten Elemente im aktiven Lösungsgebiet konstant. Nur auf diese Weise kann eine Beeinflussung der Wirbelstromverlustberechnung durch Gitternetzschwankungen vermieden werden und der Randentfernungseinfluß s untersucht werden. Die Randabstandvergrößerung erfolgt durch das Hinzufügen neuer Elementschichten am Außenrand (Umfang bzw. Höhe), wie dies Bild 5.18 verdeutlicht.

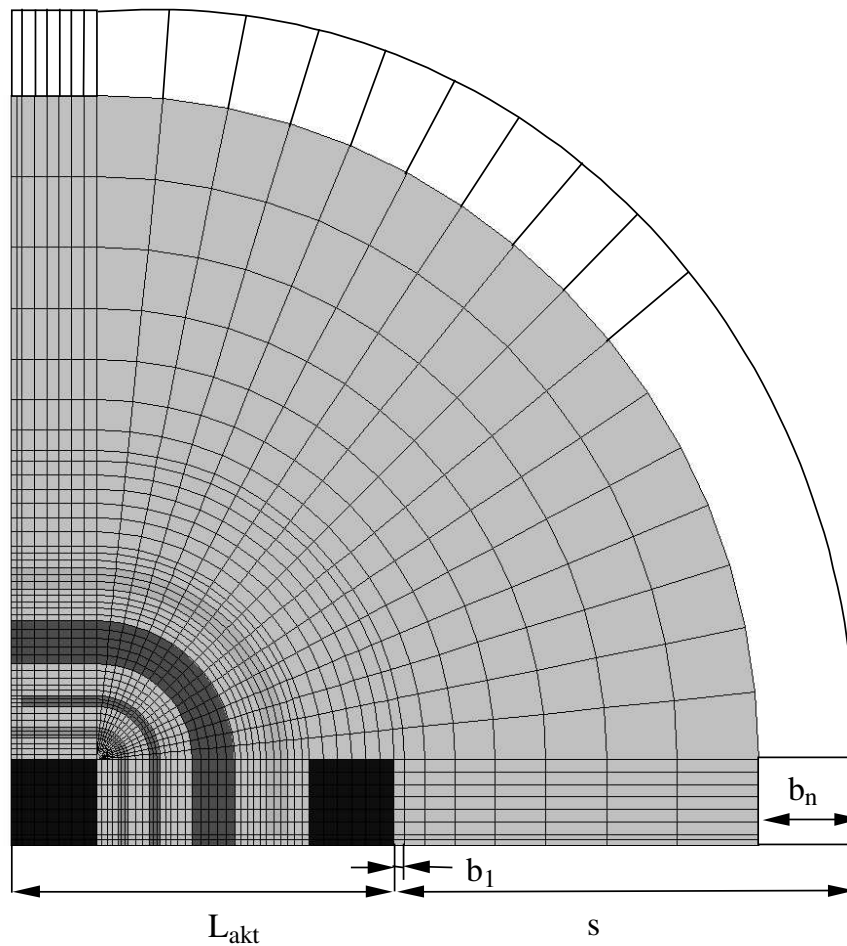


Bild 5.18 Gebietvergrößerung durch Hinzufügen neuer Elementschichten am Außenumfang

Die Elementbreiten b_1 bis b_n in der Randschicht s werden nichtäquidistant zum Außenrand ansteigend gewählt. Dabei gilt folgende geometrische Reihe für die Elementbreitensummation [BRON60]:

$$b_n = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} . \quad (5.1)$$

Für eine Randschicht mit $n=4$ Elementen ergibt sich aus (5.1) ein Längenverhältnis von $\frac{b_1}{b_4} = \frac{1}{10}$ zwischen Breite b_1 des schmalsten inneren Elementes zur Breite b_4 des äußeren Elementes. Die Randschichtbreite s wird während der Variantenrechnungen in 6 Schritten von $s=95,238$ mm auf $s=1000$ mm erhöht. Dabei wird, wie in Tabelle 5.2 angegeben, gleichzeitig auch der normierte Randabstand s / L_{akt} vergrößert.

Die Elementanzahl über der Randbreite wird in 6 Schritten von $n=4$ auf $n=14$ erhöht. Für $n=14$ ist die Randschichtlänge $s=105 \times b_1$, d.h. 105 mal so breit wie das innere Element.

Var	n	$b_n = \sum_{i=1}^n i$	$s = b_n \cdot \frac{1000}{105}$ in mm	$\frac{s}{L_{akt}}$
s_1	4	10	95,238	0,2645
s_2	6	21	200,000	0,5555
s_3	8	36	342,857	0,9524
s_4	10	55	523,809	1,4550
s_5	12	78	742,857	2,0635
s_6	14	105	1000,00	2,7777

Tabelle 5.2 Varianten mit Vergrößerung des Randabstandes s

Für alle Varianten s_1 bis s_6 wird zusätzlich der Einfluß der Randbedingung für das Vektorpotential auf dem Außenrand untersucht. Die Randbedingung wird nach 3.1.2 von $\vec{A} = 0$ auf $\underline{A}_n = 0$ und $\frac{\partial \underline{A}_t}{\partial n} = 0$ geändert. Somit werden insgesamt 12 Variantenrechnungen mit Randverschiebung durchgeführt.

Bild 5.19 zeigt als Beispiel das für die Variantenrechnungen s_4 mit $n=10$ Randelementen verwendete Gitternetz mit 1648 2D-Elementen und 1716 Knotenpunkten in der x-y-Ebene.

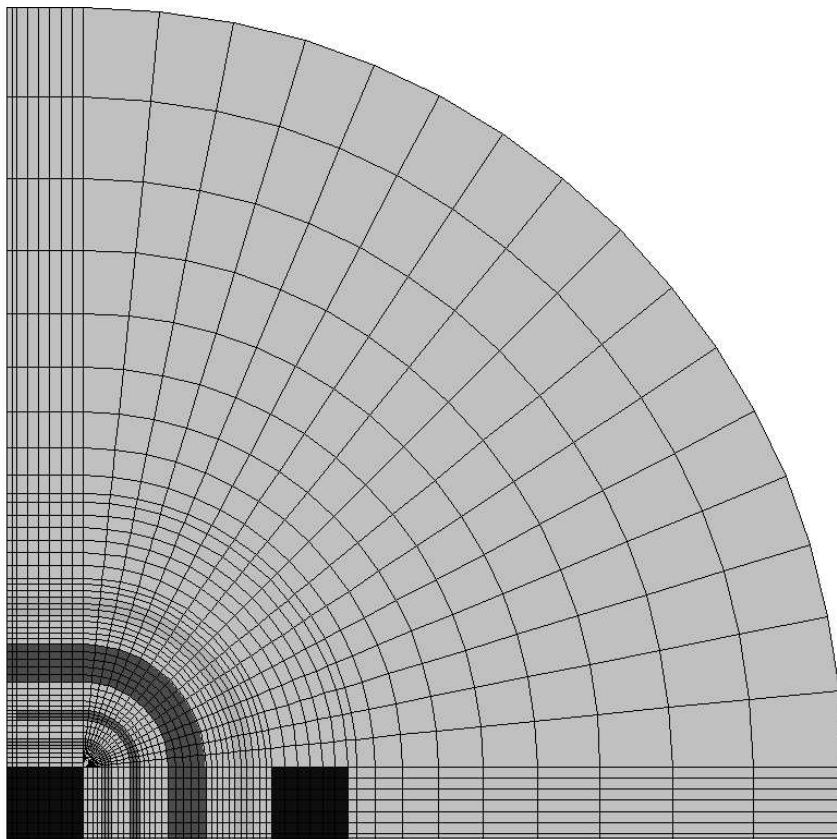


Bild 5.19 Gitternetz in der x-y-Ebene für $s=523,809$ mm, $n=10$

Mit der Anordnung nach Bild 5.19 wurden für Variante s₄ folgende Stromdichteverläufe auf der Kühlzylinderoberfläche ermittelt:

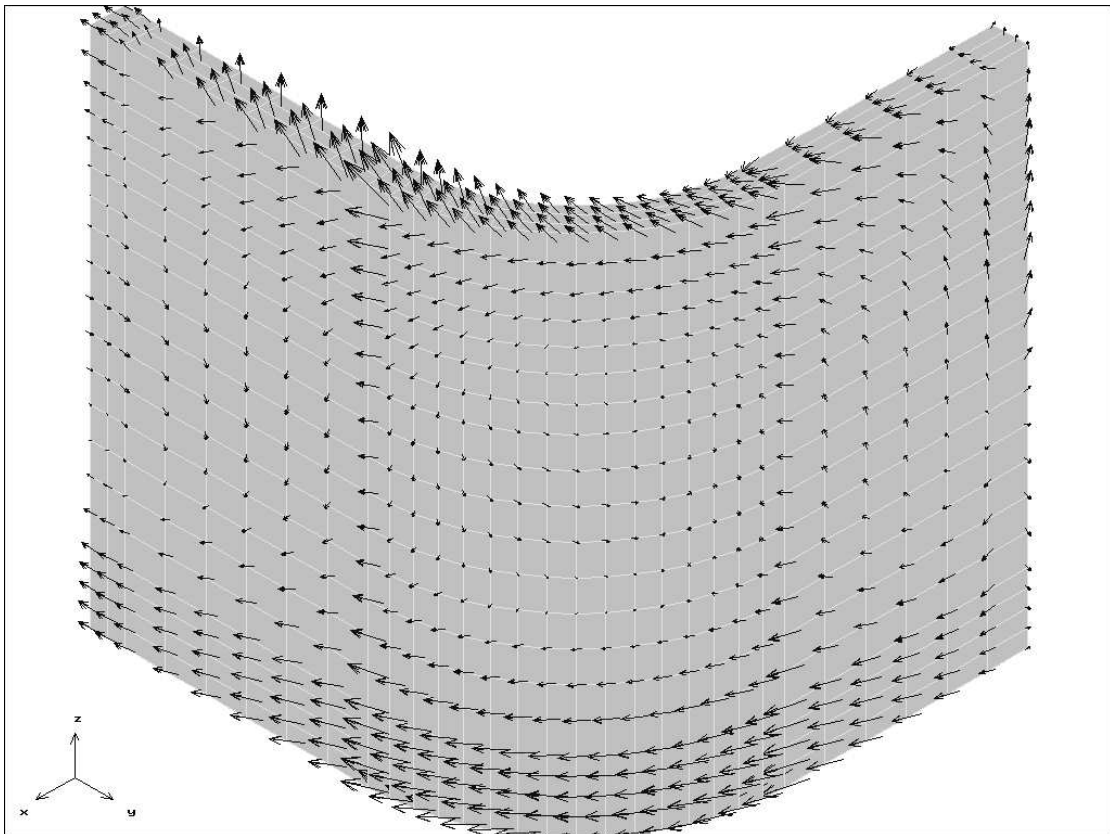


Bild 5.20 Realteil der Stromdichte auf der Kühlmanteloberfläche $s=523$ mm, $\vec{A} = 0$

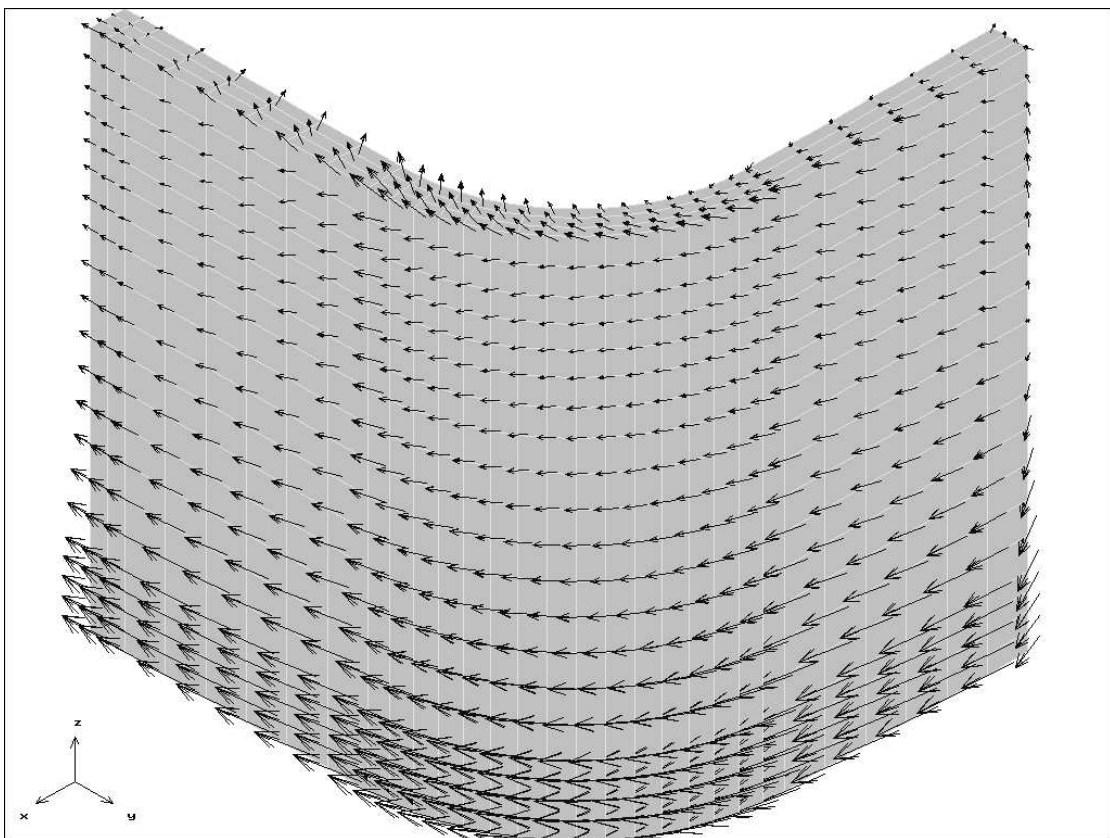


Bild 5.21 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche $s=523$ mm, $\vec{A} = 0$

Auf der Gehäuseoberfläche ergeben sich für die Anordnung s_4 folgende Stromverläufe:

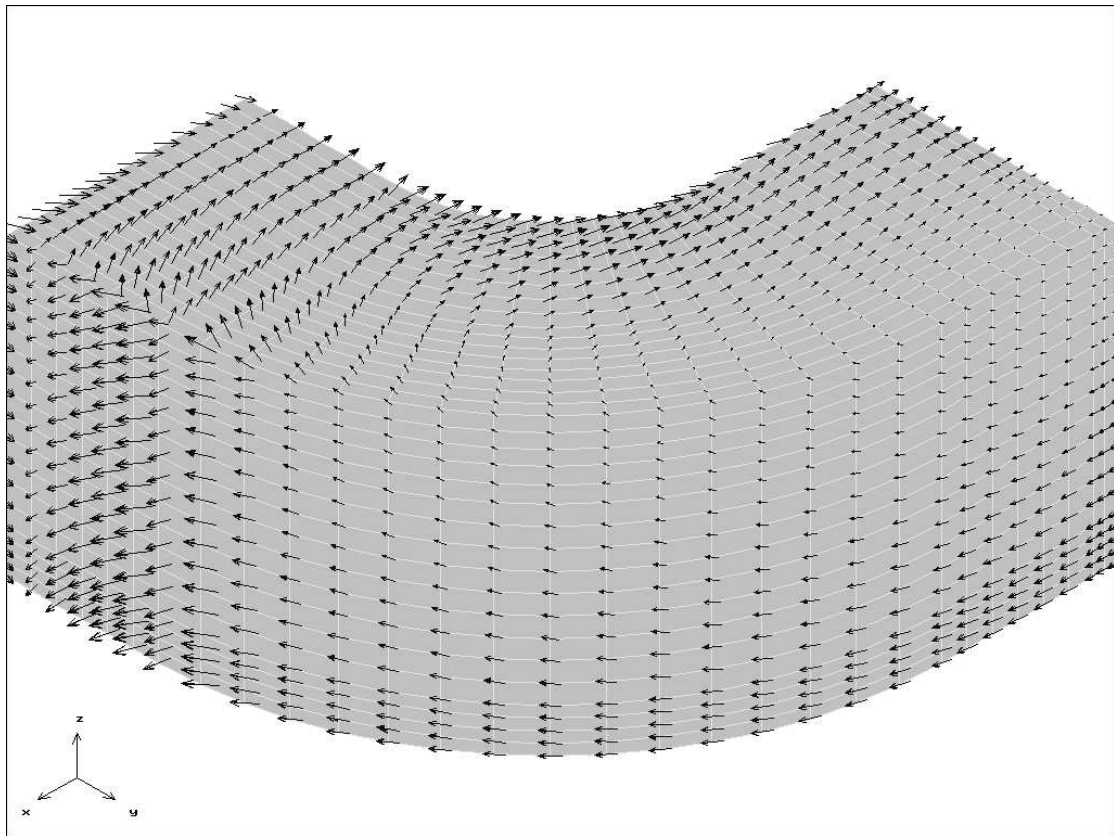


Bild 5.22 Realteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche $s = 523 \text{ mm}$, $\vec{A} = 0$

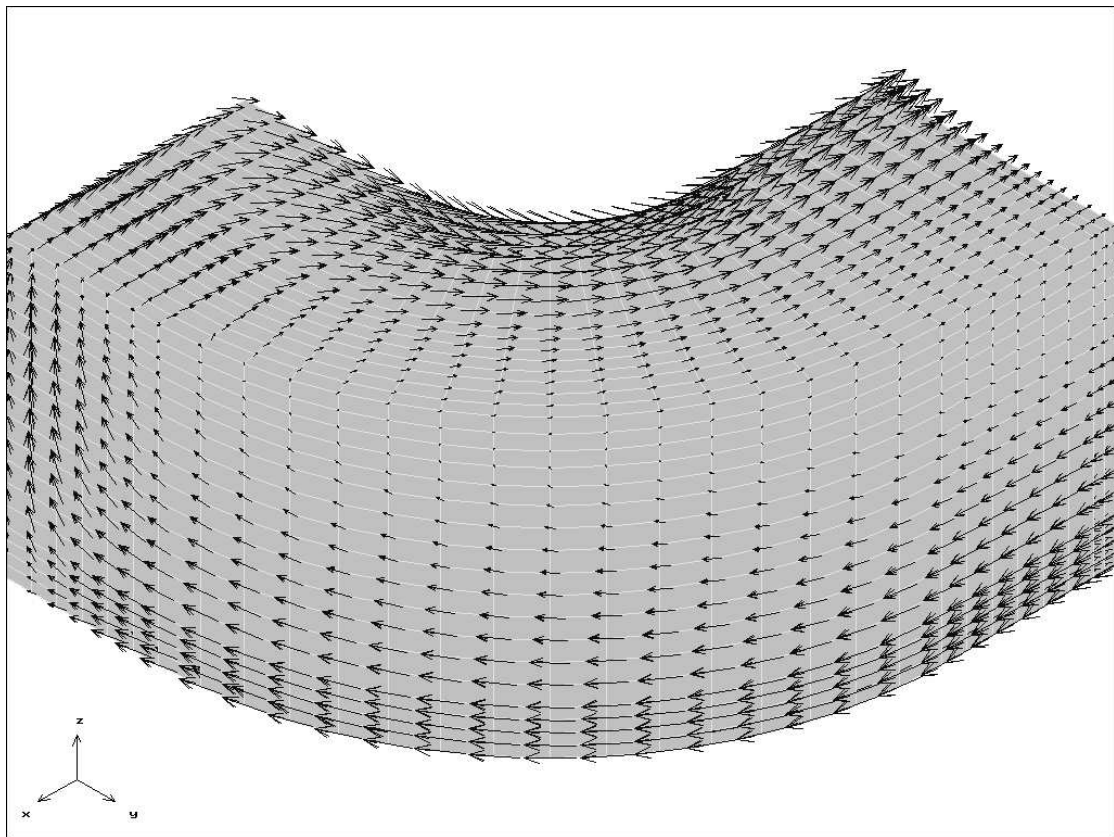


Bild 5.23 Imaginärteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche $s = 523 \text{ mm}$, $\vec{A} = 0$

Die Gitternetzdicke für die Varianten s_1 bis s_6 mit Randabstandvergrößerung wurden bewußt recht grob entsprechend Variante V3 mit ca. 60.000 Knoten gewählt. Dadurch kann eine Variante in ca. 5 bis 6 h auf der HP- Workstation vollständig berechnet werden.

Als Ergebnis wurden folgende Wirk- und Blindleistungsveränderungen berechnet:

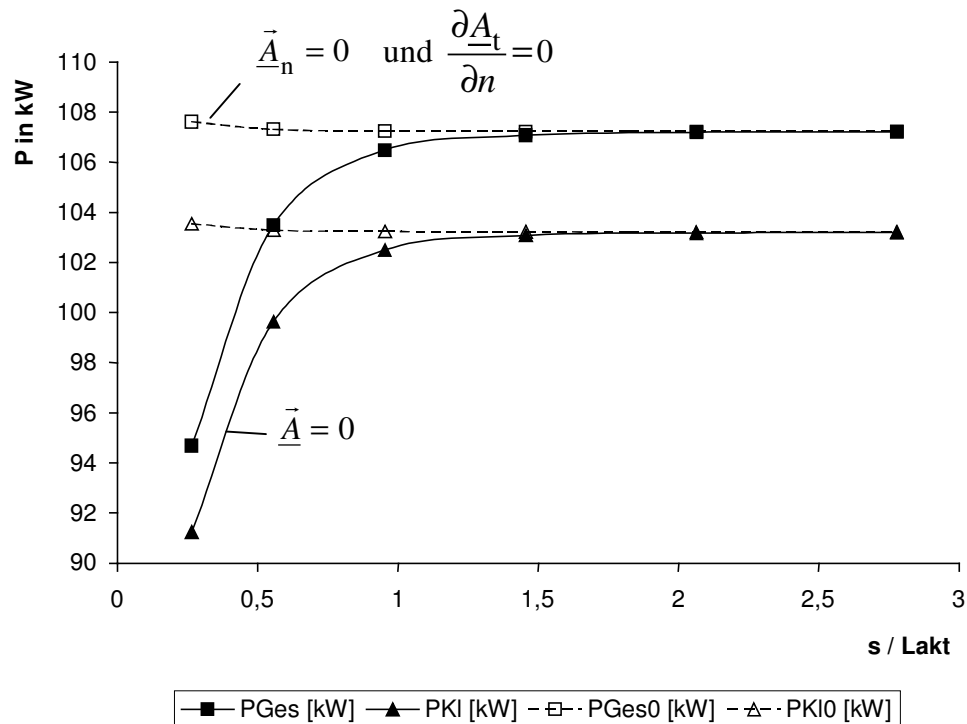


Bild 5.24 Wirkleistung in der Rinne, an den Klemmen und Gesamtwirkleistung

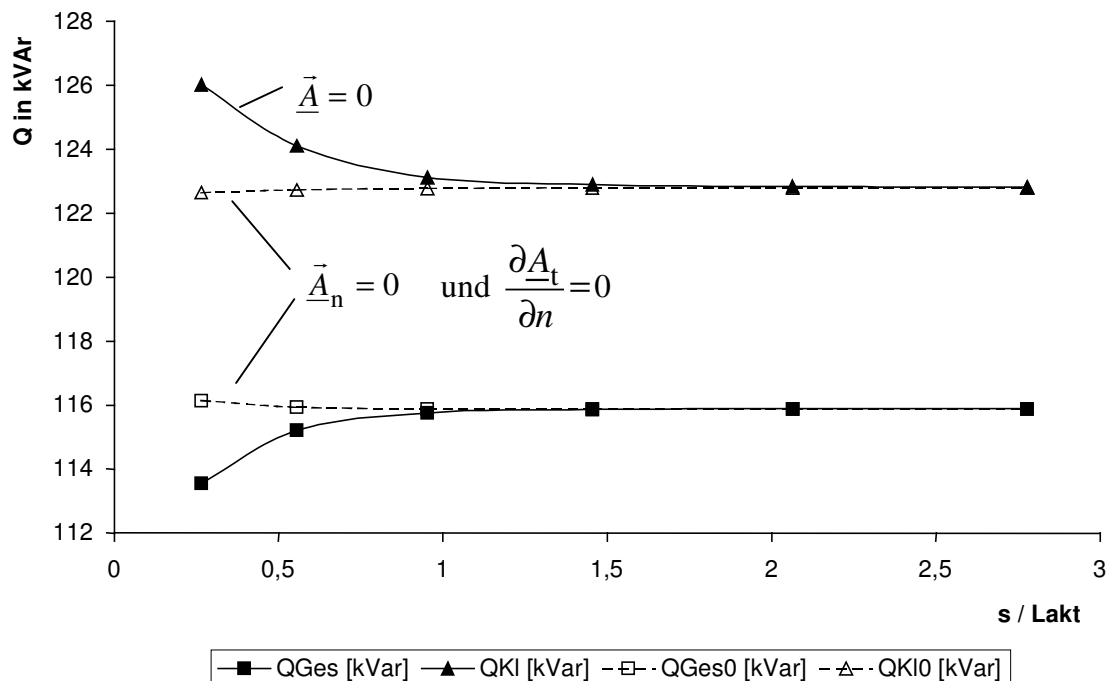


Bild 5.25 Blindleistung an den Klemmen und Gesamtblindleistung

Deutlich erkennbar wird in Bild 5.24 und 5.25, daß ein ausreichender Randabstand s für die Varianten mit $\underline{\vec{A}} = 0$ erst erreicht wird, wenn s gleich der aktiven Länge L_{akt} ist.

Aus den Variantenrechnungen mit Außenrandverschiebung wird deutlich, daß für die Varianten mit $\vec{A}_n = 0$ und $\frac{\partial \vec{A}_t}{\partial n} = 0$ im Vergleich zu den Varianten $\vec{A} = 0$, siehe Bild 5.24 und Bild 5.25, bereits bei Randabständen von $s/L_{\text{akt}} = 0,25$ zum aktiven Feldgebiet die Wirk- und Blindleistungen mit nur einem relativen Fehler von kleiner 0,2 % bezogen auf den Endwert bei $s/L_{\text{akt}} = 3,85$ berechnet werden. Für die Rinnenofenberechnung in Kapitel 6 wird daher als Randbedingung die Normalkomponente $\vec{A}_n = 0$ und $\frac{\partial \vec{A}_t}{\partial n} = 0$ gesetzt.

5.2.3 Änderung der relativen Permeabilität im Magnetjoch

Gesucht wird die Abhängigkeit der Wirk- und Blindleistungen von der relativen Permeabilität μ_r im Magnetleiter. Das Lösungsgebietvolumen und die Elementanzahl im Lösungsgebiet sowie der Randabstand bleiben während der Untersuchung konstant. Der Abstand beträgt $s = 200$ mm, dies entspricht einem Verhältnis von $s/L_{\text{akt}} = 0,55$. Das Lösungsgebiet enthält 128.075 finite Elemente mit insgesamt 134.832 Knotenpunkten.

Variante	M1	M2	M3	M4
μ_{rML}	500	1000	10 000	100 000

Tabelle 5.3 Varianten mit Änderung von μ_r im Magnetleiter

Das Gitternetz für die μ_{rML} -Variantenrechnungen ist in Bild 5.26 dargestellt. Das die Hauptkonstruktionselemente umgebende Luftgebiet wurde nicht mit gezeichnet.

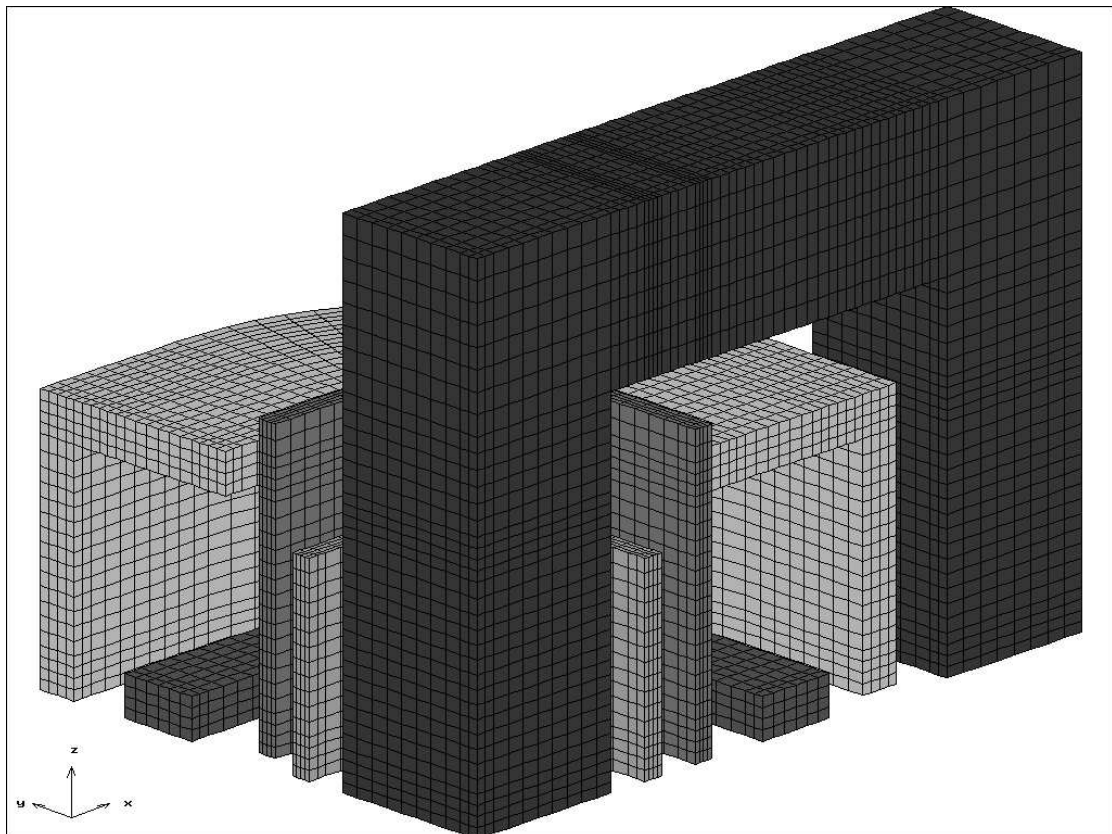


Bild 5.26 Gitternetz für die μ_{rML} -Variantenrechnungen, $s = 200$ mm

Für die Wirk- und Blindleistungen wurden in Abhängigkeit von μ_{rML} die folgenden Kurvenverläufe berechnet:

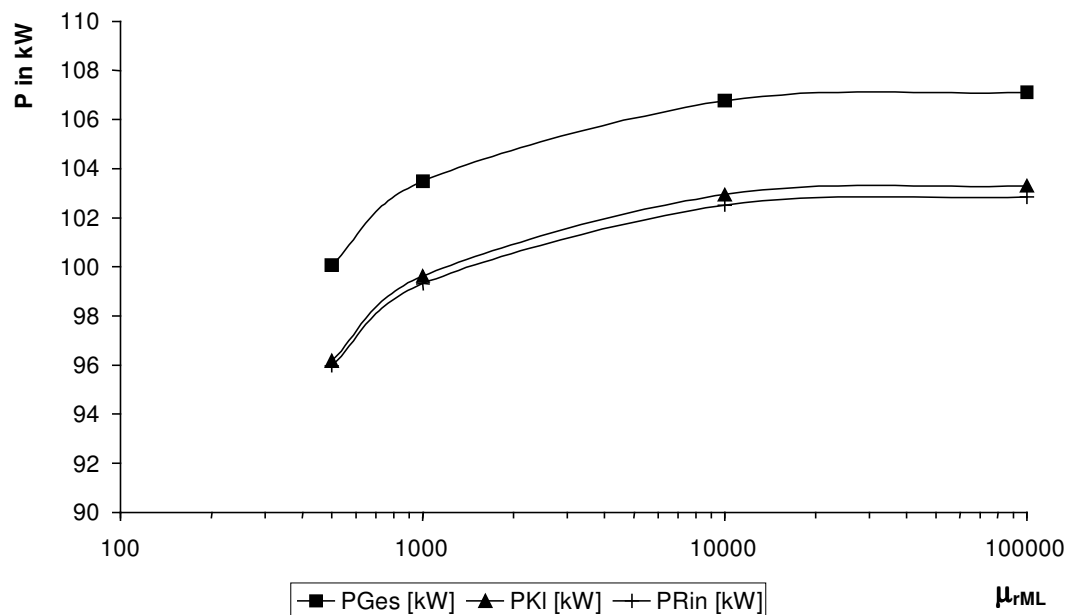


Bild 5.27 Wirkleistung in der Rinne, an den Klemmen und Gesamtwirkleistung

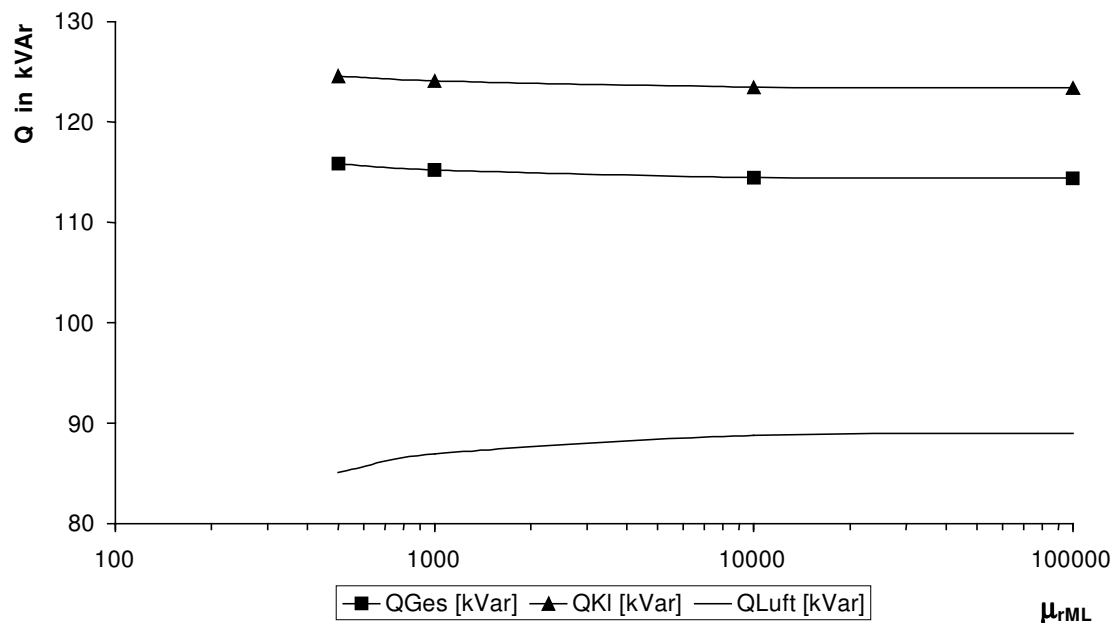


Bild 5.28 Blindleistung an den Klemmen und Gesamtblindleistung

Bei den Berechnungen mit Änderung der relativen Permeabilität wurde μ_{rML} in diskreten Schritten von 500, 1.000, 10.000 bis auf 100.000 geändert. Die Zahlenwerte zu den Berechnungsergebnissen nach den Bildern 5.27 und 5.28 sind im Anhang A3 in den Tabellen A3.10 und A3.11 enthalten.

Für die Wirkleistungen in Rinne und die Gesamtwirkleistungen ergibt sich für einen Bereich von $\mu_{rML}=700$ bis $\mu_{rML}=2000$ nur eine prozentuale Änderung von ca. 3 % bezogen auf den Minimalwert, siehe Bild 5.27 und Bild 5.28. Die Blindleistungsänderung liegt im Bereich von $\mu_{rML}=700$ bis $\mu_{rML}=2000$ dagegen nur bei ungefähr 1%. Daraus wird geschlußfolgert, daß die Rinnenofenberechnung mit einem mittleren Wert $\mu_{rML}=1000$ durchgeführt werden kann.

6. Berechnung eines realen Rinnenofeninduktors

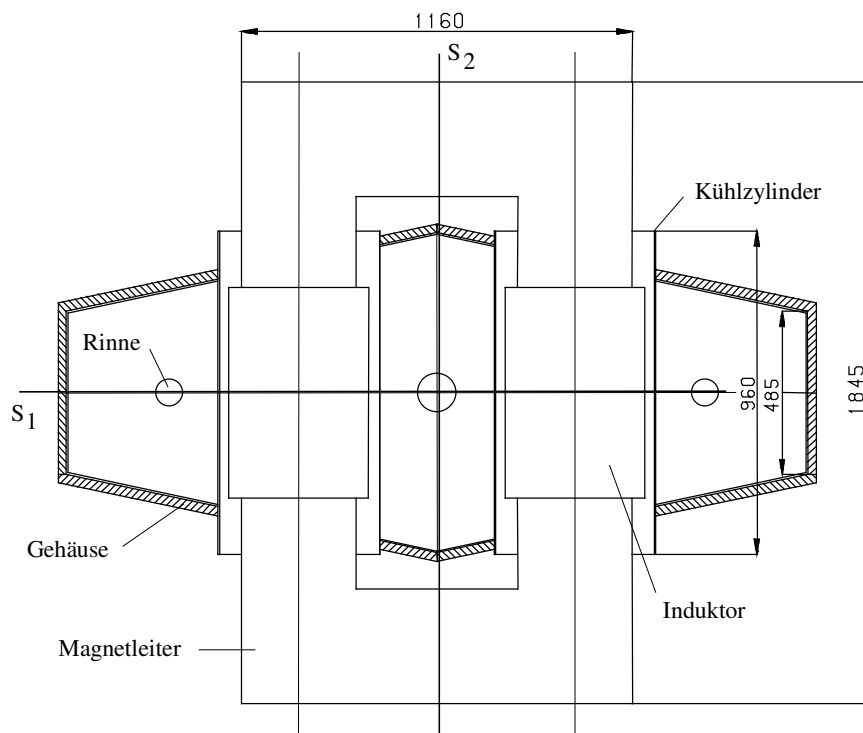
Im folgenden Kapitel werden numerische FEM-Berechnungen am Beispiel eines doppelloopigen Induktions-Rinnenofens durchgeführt, wie ihn die Industrie anwendet. Berechnet wird das elektromagnetische Feld der Induktoreinheit. Die Grundlage bildet dabei das in Kapitel 3, Abschnitt 3.1.1, vorgestellte Differentialgleichungssystem (3.28) und (3.30) in A- ϕ -Formulierung.

Ziel der Untersuchungen ist die Ermittlung der konstruktiv bedingt auftretenden Wirbelstromverluste für eine optimierte Auslegung der Induktoreinheit. Durch Minimierung der Wirbelstromverluste kann der Wirkungsgrad von Öfen, die zum Schmelzen von z.B. Kupfer und Zink eingesetzt werden sollen, effektiv erhöht werden. Aus den FEM-Stromverläufen können Hinweise auf kritische Bauteile mit möglicher partieller Verlustüberlastung erhalten werden.

Für die Berechnungen gelten die in Abschnitt 3.1 getroffenen Voraussetzungen für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes von Induktionsöfen. Alle Materialeigenschaften werden für die Berechnung als element- und gebietsweise konstant angenommen. Die Abhängigkeit der Permeabilität von der magnetischen Feldstärke wird auf Grundlage der Untersuchungen in Abschnitt 5.2.3 vernachlässigt. Somit wird für den magnetischen Rückschluß und das Gehäusematerial eine konstante Permeabilität angenommen.

Die berechneten Wirbelstromverluste werden in Abschnitt 6.4.2 mit den Meßwerten vom praktisch ausgeführten Rinnenofen verglichen. In Abschnitt 6.4.1 wird eine zusätzliche Fehleranalyse über die integrale Strombilanz (3.60) lt. Abschnitt 3.2 vorgenommen.

6.1 Prinzip des doppelloopigen Rinnenofens



In den Bildern 6.1 und 6.2 wird die Geometrie der zu berechnenden Induktoreinheit eines doppelloopigen Rinnenofens verdeutlicht. Erkennbar sind die beiden Induktoren und der durch diese hindurchgeführte, in sich geschlossene Magnetleiter.

Um die Induktoren herumgelegt sind jeweils Kühlzylinder aus 5 mm starkem Kupferblech. Zur Verringerung der Wirbelstromverluste sind die Kühlzylinder auf ihrer Oberseite senkrecht zu den Induktorwicklungen geschlitzt.

Bild 6.1 Skizze vom doppelloopigen Rinnenofen

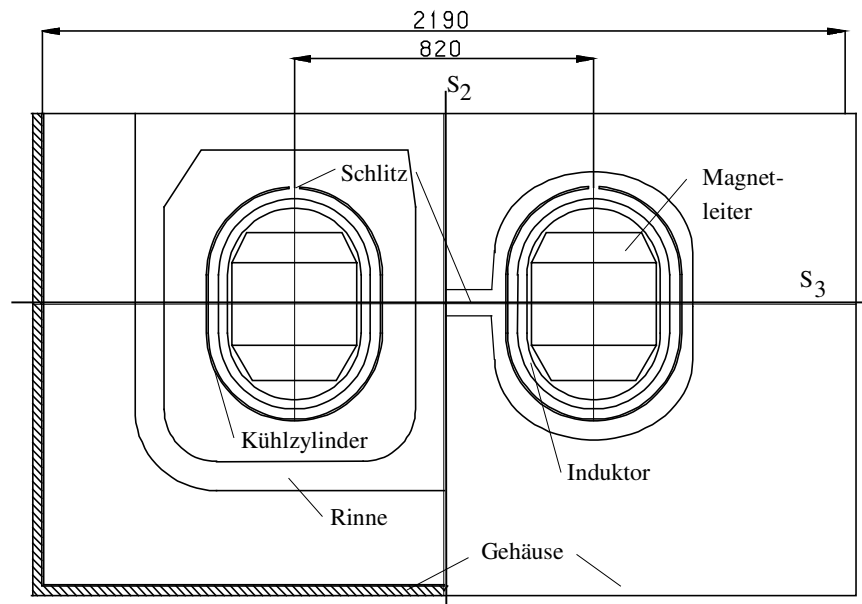


Bild 6.2 Schnitt durch den doppelloopigen Rinnenofen

Induktorgehäuse. Es dient der Aufnahme der Stampfmasse und bildet den äußeren Abschluß der Induktoreinheit vom Rinnenofen.

Die Schmelzrinne ist in Form einer Doppelschleife um die Kühlzylinder und damit auch die Induktoren herumgelegt. Sie ist ein Kanal in der Stampfmasse.

In der Schmelzrinne wird das flüssige Schmelzenmaterial, in diesem Fall eine Kupferlegierung, induktiv bis auf Schmelztemperatur erhitzt.

Außerhalb vom Induktor, dem Kühlzylinder und der Rinne befindet sich das In-

6.2 Vorbereitungen zur numerischen Berechnung

Vor der Durchführung der numerischen Berechnung mit der Finiten Elemente Methode muß das Lösungsgebiet des Rinnenofens geeignet in finite Volumenelemente diskretisiert werden. Nachteilig wirken sich vor allem die ungünstigen Geometrieverhältnisse (5 mm Cu-Blech im Kühlzylinder gegenüber ca. 2,2 m Ofenlänge) aus. Das Gesamtgebiet des Ofens kann aufgrund der begrenzten zur Verfügung stehenden Speicherkapazität der HP Apollo 9000 Workstation nicht ausreichend fein für eine entsprechend genaue Berechnung in finite Elemente diskretisiert werden. Um die Rechnung dennoch durchführen zu können, muß das Rinnenofen- Gesamtgebiet unter Nutzung von Symmetrieebenen, an denen die Randbedingungen des elektromagnetischen Feldes bekannt sind, auf ein kleineres Lösungsgebiet reduziert werden.

Durch Nutzung der im Rinnenofen vorhandenen natürlichen Symmetrieebenen S_1 und S_2 , siehe Bild 6.1, könnte die Berechnung auf ein Viertel des Gesamtgebietes reduziert werden. Dieses Gebiet müßte dann jedoch in mindestens 200.000 Elemente unterteilt werden. Der Aufwand für diese Rechnung liegt, wie in den Voruntersuchungen Bild 5.16 dargestellt wird, mit etwa einer Woche Rechenzeit für eine Geometrievariante viel zu hoch. Als Alternative wird im Ofenraum eine zusätzliche (künstliche) Symmetrieebene S_3 , wie Bild 6.2 zeigt, eingeführt. Diese Symmetrieebene schneidet den Induktor in halber Höhe, so daß vom Gesamtgebiet des Ofens unter Verwendung aller Symmetrieebenen S_1 bis S_3 nur noch ein Achtel des Gesamtgebietes als reduziertes Lösungsgebiet übrigbleibt. Das so reduzierte Lösungsgebiet kann mit etwa 100.000 finiten Elementen hinreichend fein für die Berechnung unterteilt werden. Als Abweichung von der Realität ergibt sich durch die zusätzliche künstliche Symmetrieebene jedoch ein doppelt (Oben und Unten) geschlitzter Kühlzylinder. Das Induktorgehäuse weist jetzt

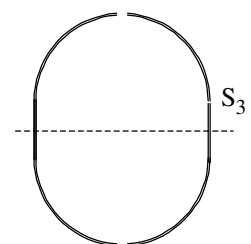


Bild 6.3 Kühlmantelschlitz

außerdem abweichend von der realen oben offenen Ausführung noch einen Gehäusedeckel auf.

Bei der Modellbildung werden nur die relevanten Abmessungen der Hauptkonstruktionsteile Induktor, Kühlmantel, Magnetleiter, Rinne und Gehäuse berücksichtigt. Die Kühlrohre am Kühlmantel, die Verschraubungen des Magnetleiterpaketes und die Gehäuseverstrebungen werden vernachlässigt. Die im Original runde Rinnenform wird durch eine eckige Form gleichen Querschnittes ersetzt.

Für die Unterteilung des reduzierten Lösungsgebietes in finite Elemente wird das in Kapitel 5.1 vorgestellte Makroelementekonzept angewendet (siehe Bild 5.6).

Vor der Generierung des dreidimensionalen Gitternetzes wird zunächst ein zweidimensionales Gitternetz der xy-Ebene des Ofens wie in Bild 6.4 erstellt. Bei der Vernetzung werden alle leitfähigen Teile und auch der Magnetleiter mit einer unterschiedlichen Materialkennziffer im Lösungsgebiet versehen. Alle nichtleitenden Materialien, d.h. auch die Stampfmasse, werden als Luftgebiet aufgefaßt.

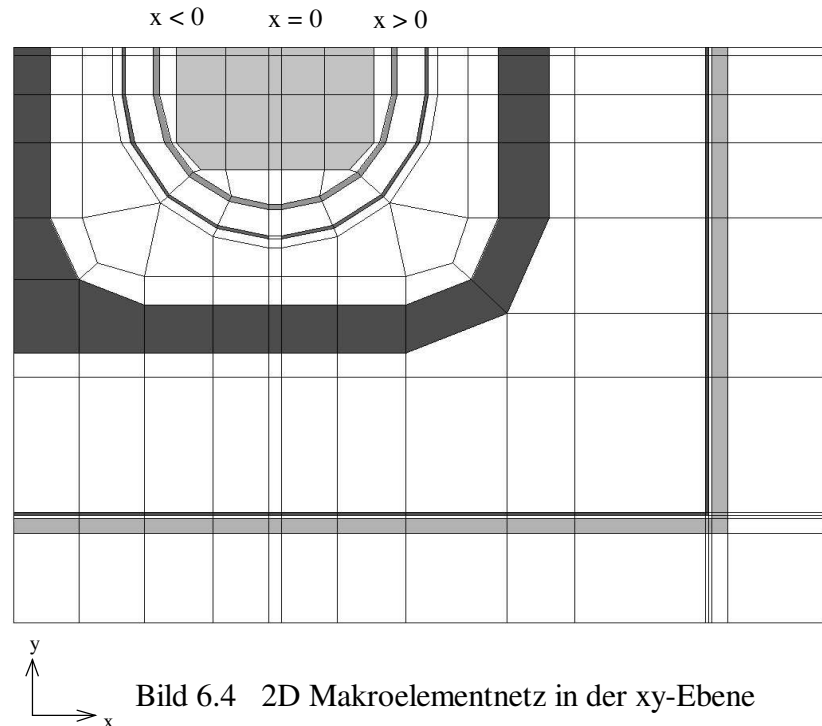


Bild 6.4 2D Makroelementnetz in der xy-Ebene

Das endgültige dreidimensionale Makroelementgitter entsteht anschließend durch Übereinanderschichtung der Makroelemente aus dem zweidimensionalen Makroelemente-Netz. Bild 6.5 zeigt dazu das als Ergebnis entstandene räumliche Makroelementgitter des reduzierten Rinnenofen-Lösungsgebietes. Zur besseren Übersichtlichkeit wurden nur die leitfähigen Konstruktionselemente und der Magnetleiter abgebildet. Die Unterteilung des Luftgebietes ist in der Darstellung nicht mit enthalten.

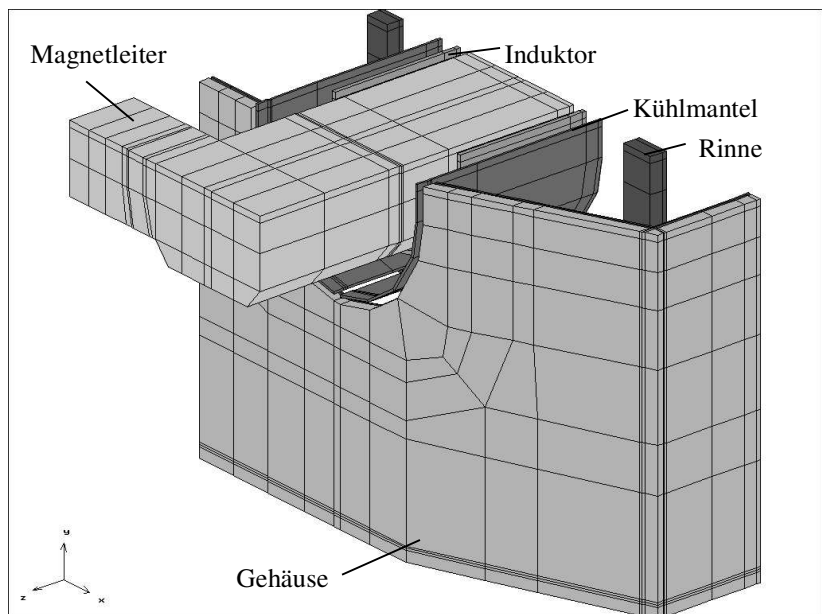


Bild 6.5 3D Makroelementnetz für die Hauptelemente

Durch die Zerlegung der Makroelemente nach Bild 6.5 in finite Elemente erhält man die endgültige dreidimensionale Vernetzung, siehe Bild 6.6, die für die Berechnung des elektromagnetischen Feldes und die nachfolgende Wirbelstromberechnung sowie die Wirk- und Blindleistungsberechnung verwendet wird.

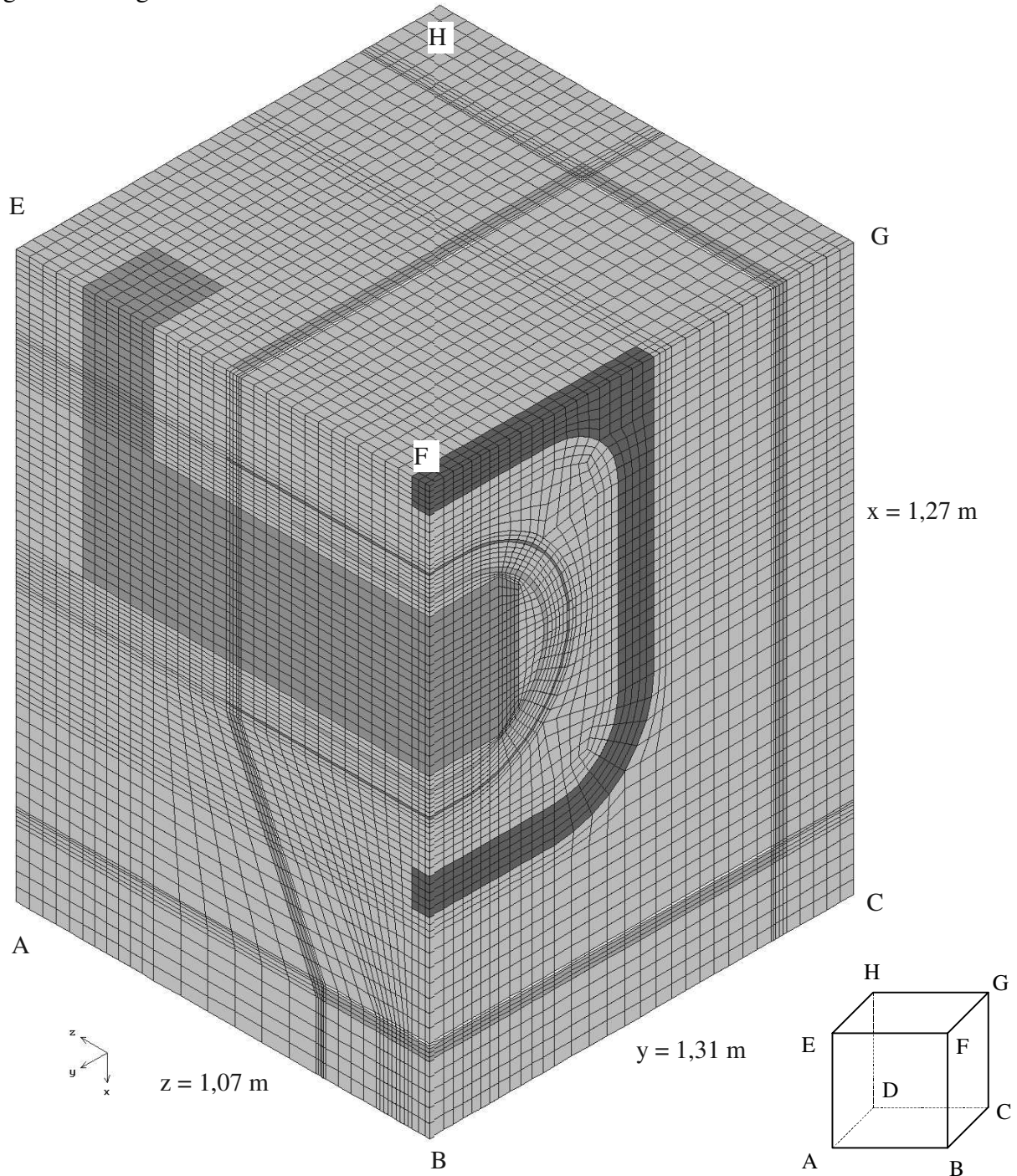


Bild 6.6 Finite Elemente Vernetzung von einem Achtel des Rinnenofens
102.768 Elemente und insgesamt 109.668 Knotenpunkte

Für das Lösungsgebiet in Bild 6.6 wurde entsprechend den numerischen Voruntersuchungen in Kapitel 5 die Normalkomponente des Vektorpotentials auf den Außenflächen **ABCD**, **CDGH** und **AEDH** $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$ sowie die Ableitungen der Tangentialkomponenten in Normalenrichtung $\frac{\partial(\vec{A} \times \vec{n})}{\partial n} = 0$ gesetzt.

Die folgende Abbildung 6.7 verdeutlicht die im Lösungsgebiet Bild 6.6 enthaltenen Hauptkonstruktionselemente, die für die Berechnung im Induktionsrinnenofen relevant sind. Die Darstellung wurde nochmals an der yx-Ebene gespiegelt, so daß jetzt ein Viertel des Gesamtlösungsgebietes betrachtet wird.

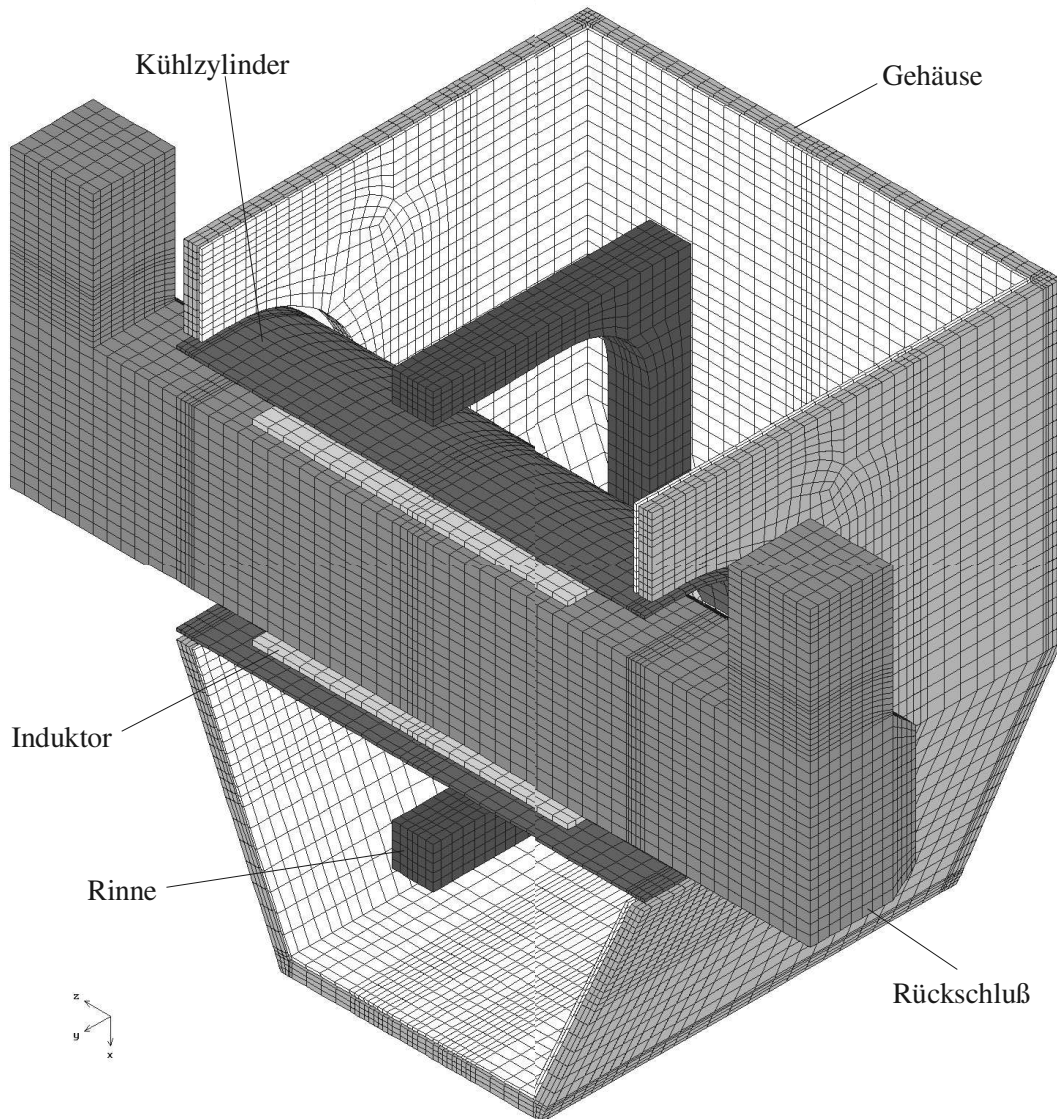


Bild 6.7 Rinnenofen-Konstruktionselemente in einem Viertel vom Lösungsgebiet

Mit der Anordnung nach Bild 6.7 werden, wie nachfolgend erläutert, die Variantenrechnungen zur Untersuchung der Wirbelstromverluste im Rinnenofen durchgeführt.

6.3 Wirbelstromverlustberechnung mit veränderlichen Materialwerten

Um den Einfluß unterschiedlicher Materialeigenschaften von Kühlzylinder und Induktorgehäuse auf die Größe der Wirbelstromverluste untersuchen zu können, werden vier Variantenrechnungen durchgeführt. Bei allen Varianten bleiben der am Induktor eingepreßte Strom, die Arbeitsfrequenz des Ofens, die Windungszahl der Induktorwicklungen, das Schmelzenmaterial sowie die Geometrie der Konstruktionselemente gleich. Verändert werden lediglich, wie in Tabelle 6.1 dargestellt, die elektrische Leitfähigkeit von Kühlzylinder und Induktorgehäuse, sowie die Permeabilität des Gehäusematerials. In den Varianten 3 und 4 weist das Induktorgehäuse gegenüber den

Variantenrechnungen 1 und 2 auf der Innenseite eine zusätzliche Abschirmung aus 5 mm starkem Kupferblech zur besseren Reduzierung der Wirbelströme auf. Die Parameter für die vier Variantenrechnungen lauten wie folgt:

elektrische Parameter: Arbeitsfrequenz $f = 50 \text{ Hz}$
 Eingprägter Strom $I = 5000 \text{ A}$
 Windungszahl $W = 2 \times 17 \text{ Windg.}$

Materialeigenschaften: Induktor, Cu : $\kappa_1 = 5.6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_{r1} = 1$
 Rinne : $\kappa_2 = 4 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, $\mu_{r2} = 1$
 Luft : $\kappa_3 = 0 \text{ S/m}$, $\mu_{r3} = 1$
 Magnetleiter : $\kappa_4 = 0 \text{ S/m}$, $\mu_{r4} = 1000$

Variante	Kühlzylinder			Induktorgehäuse		
	Material	κ_5 in S/m	μ_{r5}	Material	$\kappa_{6,7}$ in S/m	$\mu_{r6,7}$
1	Kupfer	$5,6 \cdot 10^7$	1	unmagn. Stahl	$1,0 \cdot 10^6$	1
2	Kupfer	$5,6 \cdot 10^7$	1	magn. Stahl	$1,0 \cdot 10^6$	1000
3	Kupfer	$5,6 \cdot 10^7$	1	Kupfer, + magn. Stahl	$5,6 \cdot 10^7$ $1,0 \cdot 10^6$	1 1000
4	unmagn. Stahl	$1,0 \cdot 10^6$	1	Kupfer, + magn. Stahl	$5,6 \cdot 10^7$ $1,0 \cdot 10^6$	1 1000

Tabelle 6.1 Parameter für die Variantenrechnungen am doppelloopigen Rinnenofen

Die Berechnung des elektromagnetischen Feldes und die nachfolgende Wirbelstrom- und Verlustberechnung für die in Tabelle 6.1 aufgeführten Berechnungsvarianten des doppelloopigen Netzfrequenz-Induktionsrinnenofens werden auf der HP-APOLLO 9000 Workstation durchgeführt. Der Rechenzeitaufwand für die Lösung der algebraischen Gleichungssysteme mit etwa 800.000 Unbekannten beträgt bei Einsatz des ICCG-Solvers lt. Abschnitt 4.3 maximal 1 d : 12 h : 20 min.

Nach der Berechnung der Vektorpotentialverteilung und des skalaren Potentials, die das elektromagnetische Feld an den Knotenpunkten des Gitternetzes beschreiben, kann die Stromdichteverteilung in den leitfähigen Gebieten nach Gleichung (3.54) berechnet werden. Anschließend wird aus der ermittelten Stromdichteverteilung durch Integration, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, die Leistungsverteilung in den einzelnen Gebietsabschnitten berechnet.

In den nachfolgenden Abbildungen 6.8 bis 6.13 werden für die Variante 3 die für den Kühlzylinder und das Induktorgehäuse berechneten Stromverteilungen grafisch veranschaulicht. Die Leistungsbilanzen für Variante 3 werden später im Abschnitt 6.4 mit den Meßwerten vom identisch ausgeführten realen Rinnenofen mit kupferbeschichtetem Stahlgehäuse verglichen.

In Abschnitt 6.4 werden für alle vier Variantenrechnungen lt. Tabelle 6.1 die über die Schnittflächen des jeweiligen Gebiets herein- bzw. herausfließenden Ströme nach Gleichung (3.60) be-

rechnet und die Abweichungen in den Tabellen 6.3 bis 6.6 verglichen. Die integralen Leistungsbilanzen für die Wirkleistungen sind in Tabelle 6.2 enthalten.

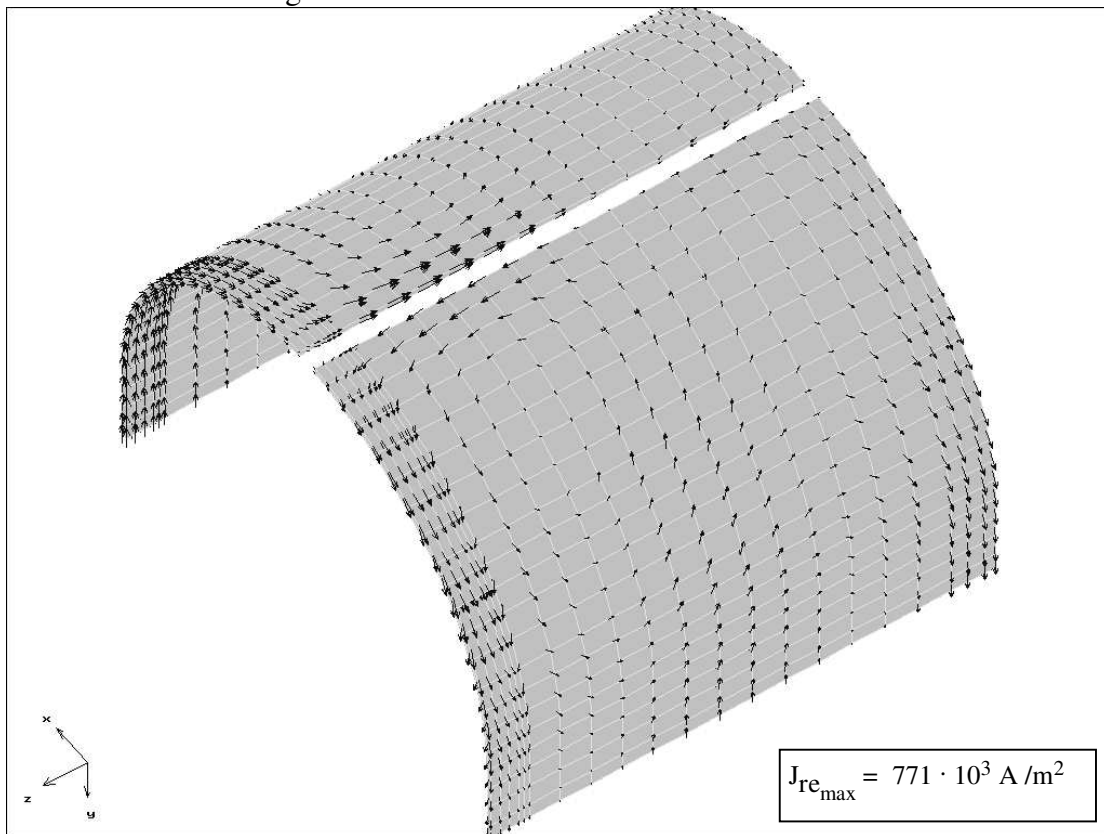


Bild 6.8 Realteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders

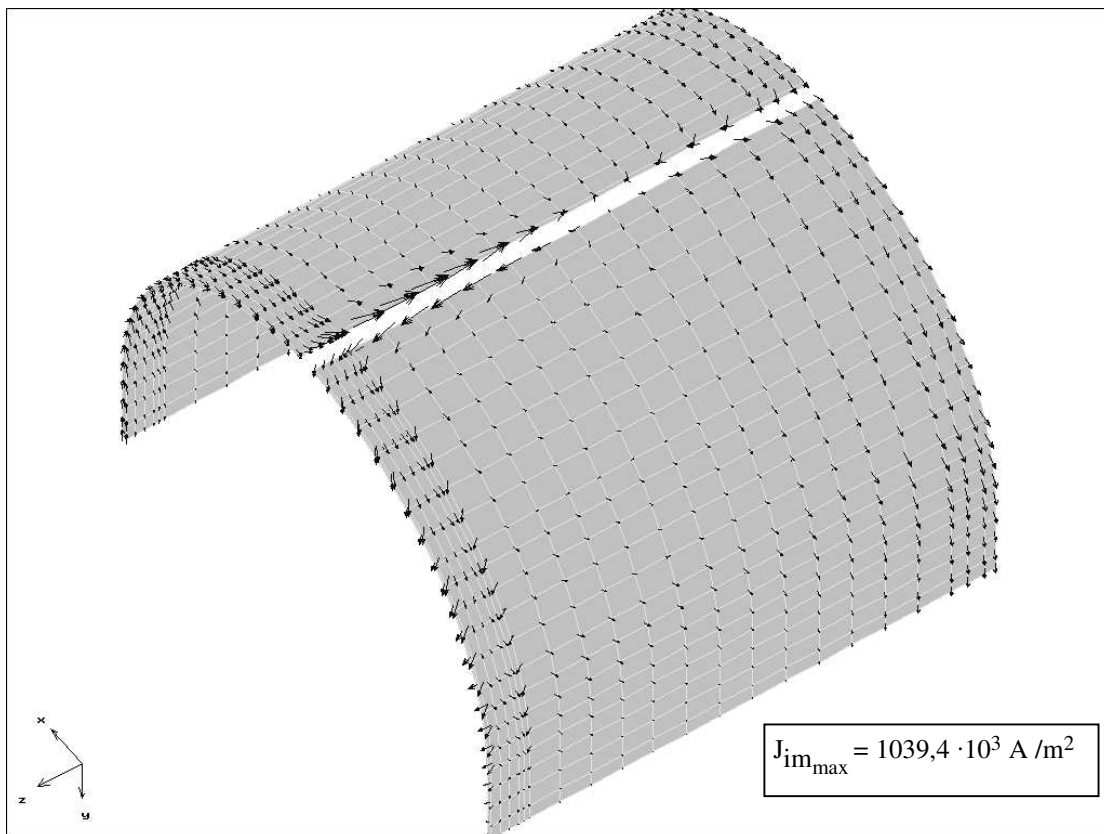


Bild 6.9 Imaginärteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders

In Bild 6.8 und 6.9 erkennt man, daß die Bereiche mit den größten Stromwerten, d.h. der größten Verlustleistungsbelastung, im Randbereich vom Kühlzylinder liegen.

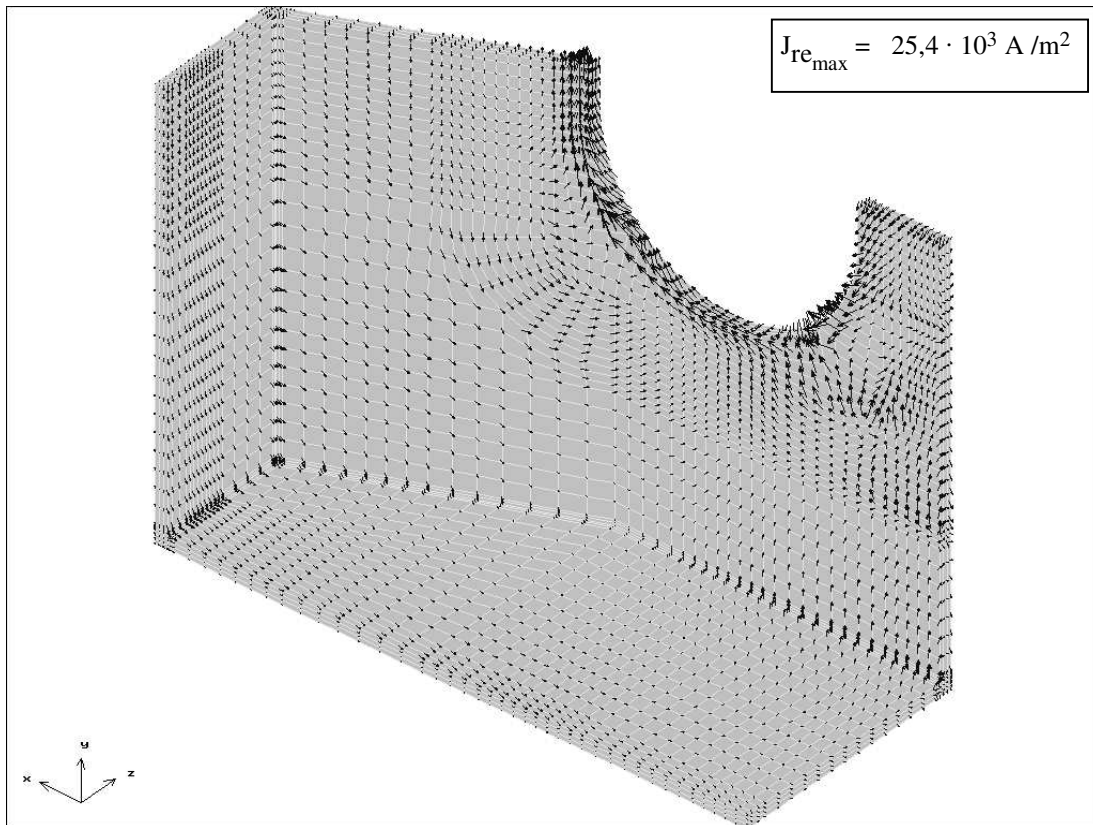


Bild 6.10 Realteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Stahlgehäuse

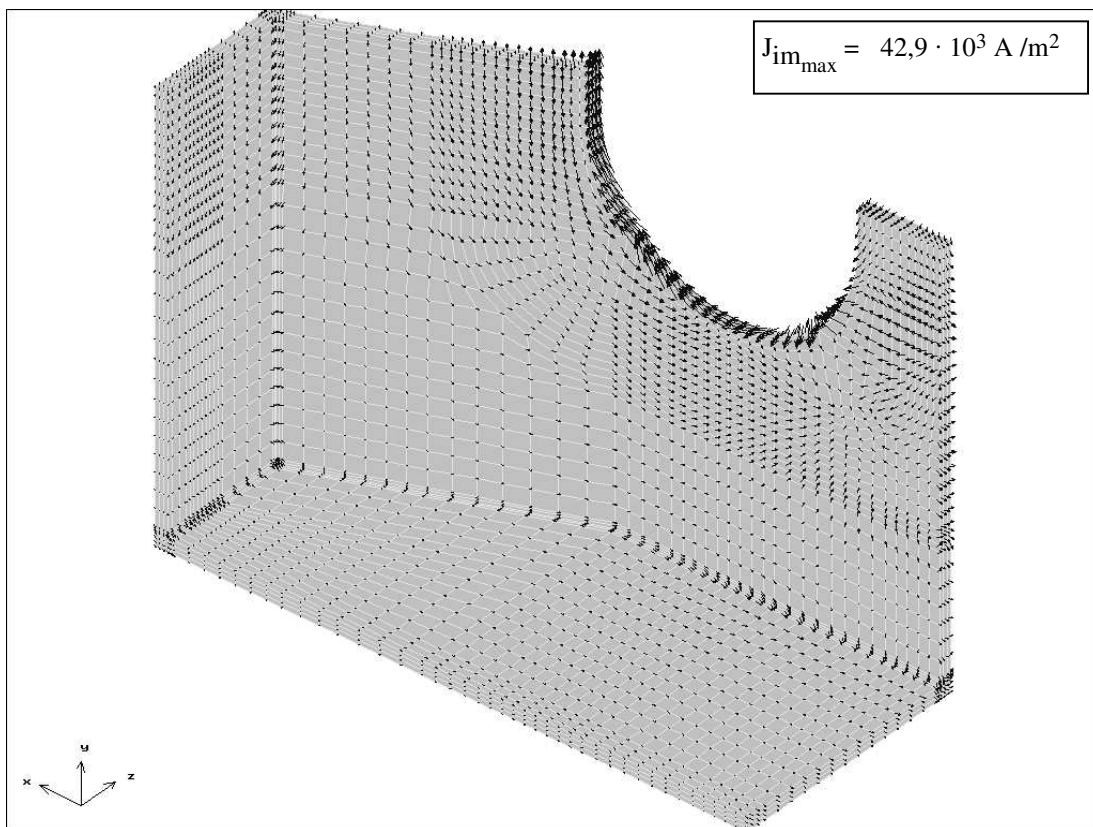


Bild 6.11 Imaginärteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Stahlgehäuse

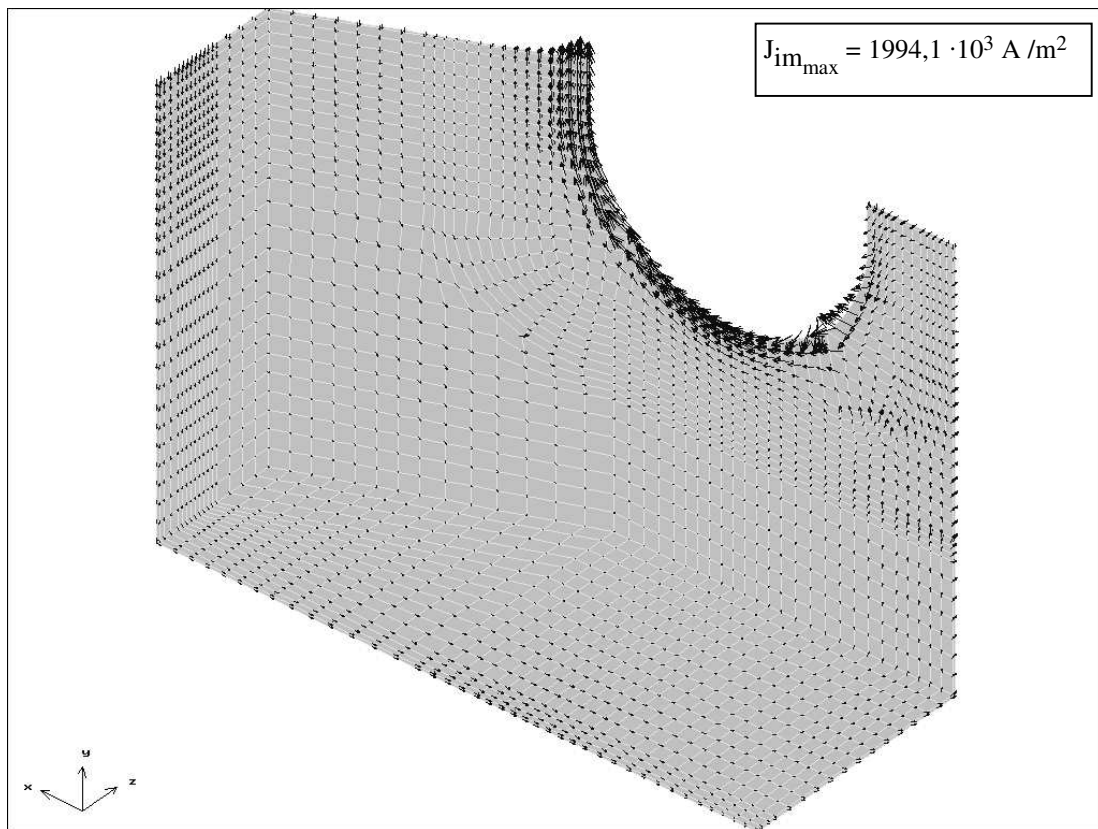


Bild 6.12 Realteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Kupfergehäuse

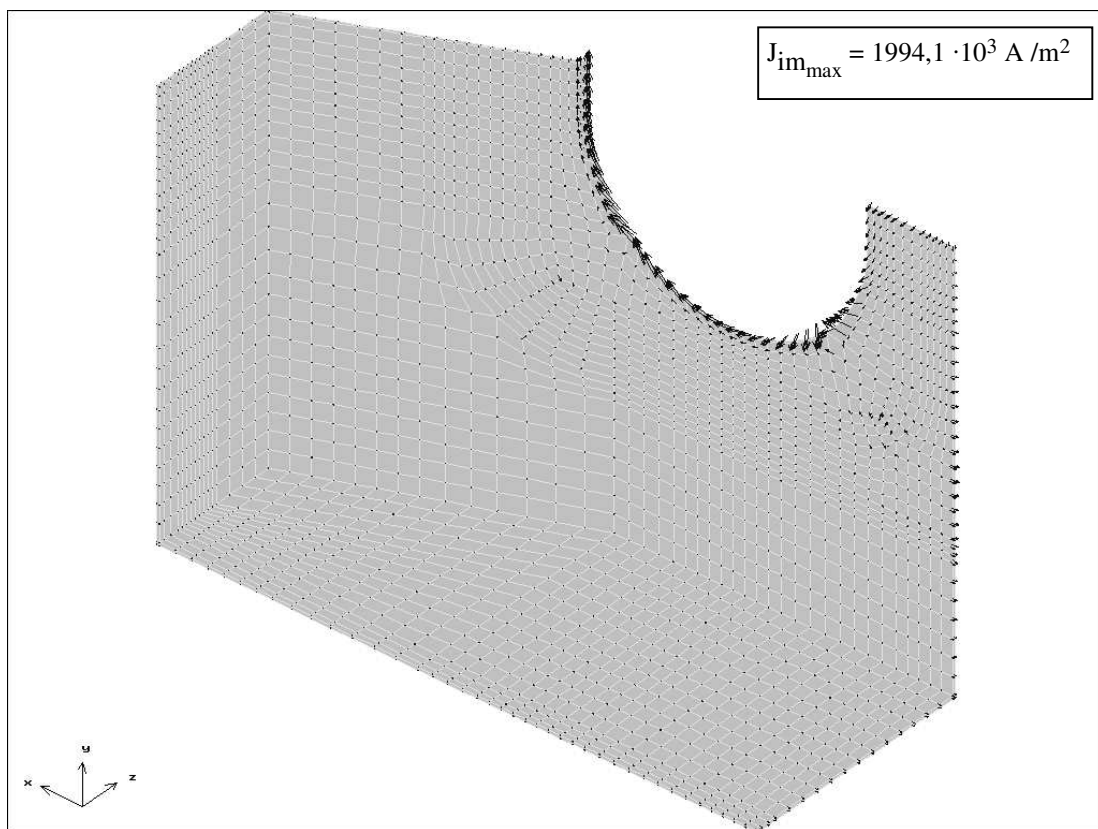


Bild 6.13 Imaginärteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Kupfergehäuse

Aus den in Bild 6.10 bis Bild 6.13 dargestellten Stromverläufen für das Kupfer- und Stahlgehäuse sind die Bereiche mit der höchsten Wirbelstrombelastung, die dann beim Ofenbetrieb

unerwünscht partiell höher erwärmt werden, bereits anschaulich erkennbar. Die Bereiche mit partiell höherer Wirbelstrombelastung liegen sowohl für das Stahl- als auch für das Kupfergehäuse im Gehäuserandbereich der runden Aussparung, wo der den Magnetleiter umschließende Kühlzylinder noch teilweise über das Gehäuse hinausragt, siehe Bild 6.1. Diese numerisch ausgewiesene Erscheinung stimmt mit der praktischen Erfahrung des Ofenherstellers ABB-Industrietechnik Dortmund von in Betrieb befindlichen Öfen gleicher Bauart überein.

Nach den Berechnungen der Wirbelstromverteilungen in den leitfähigen Bauteilen Rinne, Kühlzylinder und Gehäuse der Induktoreinheit wurden jeweils für die vier Varianten nach Tabelle 6.1 auch die Wirkleistungen entsprechend Gleichung (3.53) berechnet. Die Ergebnisse sind nachfolgend in Tabelle 6.2 und Bild 6.14 zusammengefasst. Die Gesamtleistung P_{Ges} wurde dabei durch Summieren der Anteile für Rinne P_{Rin} , Kühlmantel P_{Km} und Gehäuse P_{Geh} berechnet. P_{Kl} stellt die aus Vektor- und Skalarpotential berechnete integrale Bilanz an den Klemmen dar. Die Gehäuseverluste für Variante 3 und Variante 4 beinhalten bereits die Verluste von der Kupfer- und der Stahlschicht.

Variante	P_{Rin} in kW	P_{Km} in kW	P_{Geh} in kW	P_{Ges} in kW	P_{Kl} in kW
1	1874,2	46,0	89,5	2009,7	1889,0
2	1872,7	40,5	81,4	1994,6	1862,7
3	1852,0	51,4	58,7	1962,1	1894,0
4	1874,9	13,2	35,5	1923,6	1876,4

Tabelle 6.2 Berechnete Wirkleistungen in Rinne, Kühlmantel und Gehäuse

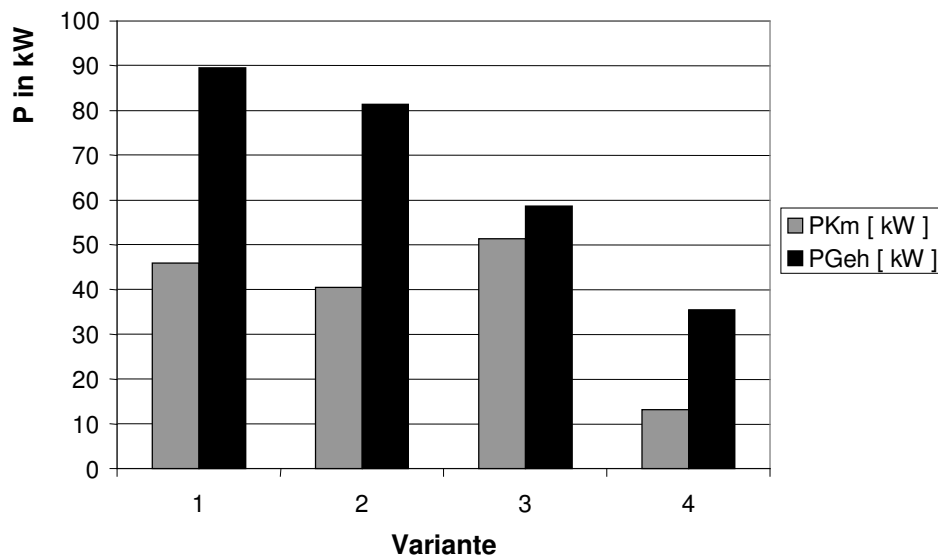


Bild 6.14 Berechnete Wirbelstromverluste in Kühlmantel und Gehäuse

Die Gehäuseverlustleistung liegt für die Variante 2 mit magnetischem Stahlgehäuse um ca. 9 % niedriger als in Variante 1 mit unmagnetischem Stahl. Ebenso sinkt die Kühlmantelverlustleistung für den Cu-Kühlmantel in Variante 1 um ca. 9% von 46 W auf 40,5 W in Variante 2, obwohl das Kühlmantelmateriale nicht geändert wurde. Prinzipiell stimmt die Tendenz mit den

von ABB gefundenen Untersuchungsergebnissen [WSEW92] überein. Erklärt werden können die geringeren Verluste beim Einsatz von magnetischem Stahl nur durch die geringeren Wirbelströme im Gehäuse, die ihrerseits wieder kleinere Wirbelströme im Randbereich des Cu-Kühlzylinders generieren. Es liegt also eine wechselseitige Beeinflussung zwischen Kühlzylinder und Gehäuse besonders im Bereich der Magnetleiterdurchführung vor, die nicht vernachlässigt werden darf.

In Variante 3 verringern sich durch die zusätzliche Kupferblech-Abschirmung auf der Innenseite vom magnetischen Stahlgehäuse die Gehäuseverluste insgesamt (Cu-Schirm und Stahlgehäuse) nochmals um fast ein Drittel gegenüber den Gehäuseverlusten beim reinen magnetischen Stahlgehäuse in Variante 2. Jedoch steigen in Variante 3 die berechneten Wirbelstromverluste für den Kupferkühlmantel im Vergleich zu Variante 1 um etwa 12 % und im Vergleich zu Variante 2 um 26 % an. Die Tendenz der ansteigenden Wirbelstromverluste im Kupferkühlmantel bei Verwendung eines kupferbeschichteten Stahlgehäuses stimmt ebenfalls mit den Ergebnissen in [WSEW92] überein. Durch die Kupferschicht auf dem Stahl wird eine feldverdrängende Wirkung erzielt. Es kann nur noch ein kleinerer Teil vom Magnetfluß im Vergleich zur unbeschichteten Variante in den Gehäusestahl eindringen. Die Feldlinien müssen sich daher verstärkt im Innenraum in der Nähe vom Kühlzylinder schließen und rufen im Kühlmantel höhere Wirbelströme hervor.

Eine wirksame Eindämmung der Wirbelstromverluste im Kühlmantel kann aber, wie in Variante 4 erfolgt, durch die Verwendung eines Kühlzylindermaterials mit geringerer elektrischer Leitfähigkeit im Vergleich zu Kupfer erreicht werden. Das Berechnungsergebnis von Variante 4 mit unmagnetischem Stahlmaterial für den Kühlmantel ergibt eine Wirbelstromverlustreduzierung um beinahe 75 % im Vergleich zur Variante 3 mit Kupferkühlmantel. Obwohl das Gehäuse auch bei Variante 4 wie in Variante 3 aus magnetischem Stahl mit einer Kupferbeschichtung besteht, verkleinern sich durch die wechselseitige Feldbeeinflussung zwischen Kühlmantel und Gehäuse auch die berechneten Gehäuseverluste in Variante 4 um etwa 40 % bezogen auf die Gehäuseverluste in Variante 3.

Aus Sicht der 3D-FEM-Simulation der Wirbelströme und durch diese hervorgerufenen Verluste ergibt sich für den doppelloopigen Induktionsrinnenofen die Variante 4 als geeignetste Variante mit den im Vergleich zu den drei anderen Berechnungsvarianten niedrigsten Verlusten in Kühlmantel und Induktorgehäuse. Dieses Berechnungsergebnis stimmt mit dem vom Ofenhersteller ABB praktisch realisierten und zum Schmelzen von Kupfer eingesetzten Rinnenofen gleicher Bauart überein. Für den Einsatz am Kupferschmelzofen wurde eine Induktoreinheit mit gering leitendem Kühlmantelmaterial und kupferbeschichtetem magnetischen Stahlgehäuse optimiert [Nack91], [WSEW92]. Der hier berechnete Ofentyp befindet sich seit mehreren Jahren erfolgreich im praktischen Einsatz.

Alle weiteren Abbildungen zu den berechneten Stromverläufen für die Rechnungen mit Veränderung der Materialeigenschaften in Variante 1, Variante 2 und Variante 4 sind in Anhang A4 enthalten.

6.4 Genauigkeitsbetrachtungen zur numerischen Berechnung der Wirbelstromverluste

Die hier angewandte FEM-Berechnung der Wirbelstromverluste im Induktionsrinnenofen stellt nur ein numerisches Modellbild der Wirklichkeit dar. Abweichungen zwischen Modell und Realität ergeben sich durch:

1. Ordnung des Polynomansatzes und den finiten Elementtyp (knoten- oder kantenorientiert)
2. Begrenzte Gitternetzdicke und Knotenpunktzahl im Lösungsgebiet
3. Endliche Entfernung der Lösungsgebietsgrenzen vom aktiven Feldgebiet
4. Rechnung mit konstanter relativer Permeabilität $\mu_r = \text{const.}$
5. Geometrie – nur Hauptkonstruktionselemente werden modelliert
6. Einführung einer künstlichen Symmetrieebene
7. Numerische Rechengenauigkeit des Algorithmus und der CPU

Nachfolgend werden in Abschnitt 6.4.1 eingehendere Genauigkeitsbetrachtungen für die Feld- und Verlustberechnung anhand der in Kapitel 3 vorgestellten integralen Bilanzen (3.60) vorgenommen. Ein weiterer zahlenmäßiger Vergleich mit am realen Ofen ermittelten Meßwerten ist in Abschnitt 6.4.2 enthalten.

6.4.1 Fehleranalyse mittels integraler Bilanzen

Nach der Berechnung der Vektorpotentialverteilung und des skalaren Potentials, die das elektromagnetische Feld an den Knotenpunkten des Gitternetzes beschreiben, kann die Stromdichteverteilung in den leitfähigen Gebieten berechnet werden. Anschließend wird aus der ermittelten Stromdichteverteilung durch Integration, wie in Kapitel 2 beschrieben, die Leistungsverteilung in den einzelnen Gebietsabschnitten berechnet. In den Tabellen 6.3 bis 6.6 sind die Ergebnisse der Stromberechnungen für die Gebiete Rinne, Kühlzylinder und Ofengehäuse enthalten. Die Ströme in den einzelnen Gebieten wurden durch Integration der Stromdichteverteilung über die Schnittfläche des jeweiligen Gebiets in der xz -Symmetrieebene ermittelt. Die Schnittflächen liegen rechts ($x > 0$) und links ($x < 0$) vom Magnetleiter, siehe Bild 6.4 und 6.5. Es existieren an den Schnittflächen hinein- und herausfließende Ströme.

Var 1	Rinne		Kühlmantel		Gehäuse	
	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A
$x > 0$	4704,7	70,2	218,9	314,4	3,6	8,2
$x < 0$	- 4707,7	- 75,6	- 316,1	- 416,1		
$f_{rel} [\%]$	0,06	7,7	—	—	—	—

Tabelle 6.3 Strombilanz für Variante 1

Für den geschlitzten Kühlmantel und das Gehäuse kann keine Fehlerbilanz angegeben werden, da die über die Schnittflächen hinein- und herausfließenden Ströme nicht getrennt ausgewiesen wurden. Die angegebenen Werte sind die resultierenden Ströme über die Schnittflächen.

Var 2	Rinne		Kühlmantel		Gehäuse	
	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A
$x > 0$	4696,7	70,0	219,7	319,3	3,4	10,1
$x < 0$	- 4699,8	- 75,5	- 319,9	- 424,5		
$f_{rel} [\%]$	0,07	7,9	—	—	—	—

Tabelle 6.4 Strombilanz für Variante 2

Var 3	Rinne		Kühlmantel		Cu- Gehäuse		Fe- Gehäuse	
	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A
$x > 0$	4683,6	19,8	218,6	306,8	44,8	96,3	3,4	9,7
$x < 0$	- 4686,7	- 24,5	- 325,6	- 376,1				
$f_{rel} [\%]$	0,7	23,7	—	—	—	—	—	—

Tabelle 6.5 Strombilanz für Variante 3

Var 4	Rinne		Kühlmantel		Cu- Gehäuse		Fe- Gehäuse	
	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A
$x > 0$	4707,6	44,3	2,0	7,2	29,6	111,9	1,9	10,6
$x < 0$	- 4710,6	- 49,9	- 3,9	- 9,4				
$f_{rel} [\%]$	0,06	12,6	—	—	—	—	—	—

Tabelle 6.6 Strombilanz für Variante 4

Für die in der Rinne induzierten Ströme ergeben sich bezogen auf den am Induktor eingepprägten Strom je nach Variante Verhältnisswerte zwischen 93,7 % in Variante 3 und 94,1 % in Variante 4. Die größte Abweichung zwischen dem in die Rinne hinein- und herausfließendem Wirkstrom liegt mit 0,7 % in Variante 3. Diese geringe Abweichung beim Rinnenstrom deutet auf eine ausreichend feine Vernetzungsdichte des Gitternetzes im Rinnenbereich hin.

Die für die Gehäuseschnittflächen des Stahlgehäuses berechneten resultierenden Wirkströme, die sich aufgrund des geschlitzten Gehäuses vollständig kompensieren müßten, betragen im Verhältnis zum eingepprägtem Induktorstrom von 5000 A weniger als 0,1 % im Stahlgehäuse. Im Kupfergehäuse liegen die Werte bei maximal 0,9 % bezogen auf 5000 A.

Vergleichsweise hoch sind die Abweichungen, die sich über den Querschnittsflächen des Kühlzylinders ergeben. Bezogen auf den eingepprägten Strom liegen die relativen Fehler bei ca.

6,5 % für die Varianten 1 bis 3 mit Kupfer- Kühlzylinder. In Variante 4 mit Stahl- Kühlzylinder werden durch die geringe Leitfähigkeit des Kühlzylindermaterials erheblich weniger Wirbelströme induziert, so daß die Fehlerbilanz besser ausfällt. Hier zeigt sich jedoch, wie auch in Variante 3, ein ähnlicher negativer Effekt beim Strom über die Querschnittsfläche im Kupfergehäuse. Als Ursache für die relativ große Abweichung der Ströme wird eine zu ungleichmäßige und nicht ausreichend feine Diskretisierung in finite Elemente in diesem Bereich angesehen.

Um diese Annahme zu bestätigen, wurde von Variantenrechnung 1 eine ausschnittsweise Berechnung des Kühlzylinders mit verfeinertem Gitternetz vorgenommen. Die Ergebnisse der ausschnittswisen Berechnung sind in Kapitel 8 dargestellt.

6.4.2 Vergleich von Verlustberechnung und Messung

Zur Überprüfung der numerischen Berechnungsergebnisse wird ein Vergleich mit Verlustmessungen von einem Rinnenofen durchgeführt. Bild 6.15 zeigt dazu die gemessenen Gesamtverluste von Kühlmantel und Gehäuse. Die Gesamtverluste beinhalten hierbei sowohl die thermischen Verluste (Wärmeleitung, Konvektion, Strahlung) als auch die elektrischen Wirbelstromverluste. Der vermessene Rinnenofen entspricht der Berechnungsvariante 3 mit Kühlzylinder aus Kupfer und Kupferblech im Gehäuse aus magnetischem Stahl.

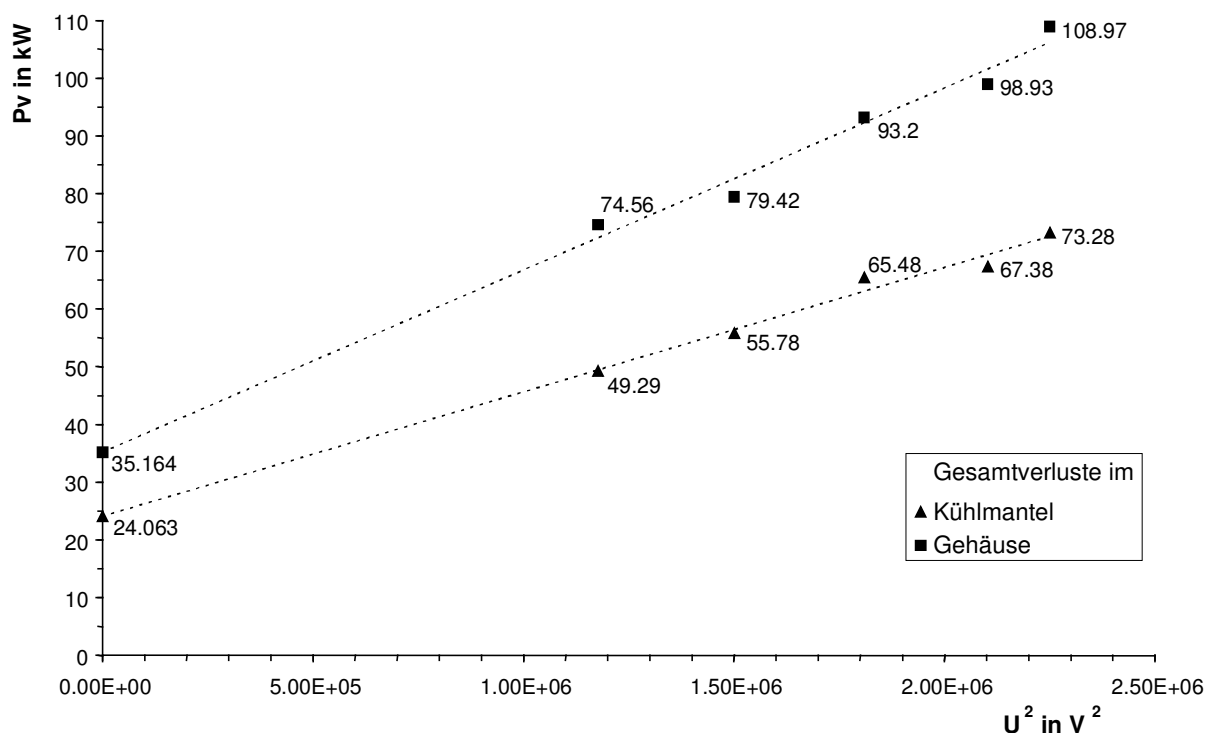


Bild 6.15 Gemessene Gesamtverluste = Thermische + Elektrische Verluste

Die durch lineare Regression aus den Meßwerten auf der Ordinate gefundenen Schnittpunkte stellen hierbei die Werte für die thermischen Verluste in Kühlmantel bzw. Gehäuse dar. Nach Abzug dieser thermischen Verluste von den gemessenen Gesamtverlusten für jeden Meßpunkt erhält man die resultierenden elektrischen Verluste, die den Wirbelstromanteil repräsentieren.

Die gemessenen Gesamtverluste und die elektrischen Verluste sind in Tabelle A4.1 und A4.2 im Anhang A4 enthalten.

Tabelle 6.7 beinhaltet den Vergleich zwischen Rechnung lt. Variante 3 und den auf Grundlage von Bild 6.14 ermittelten elektrischen Verlusten. Die Verlustleistung P_{Ges} stellt dabei die Summe aus den in Rinne, Kühlzylinder und Gehäuse induzierten Verlusten dar. In der Spalte P_{Ges} wurde ein Vergleichswert aus Nennleistung des Ofens abzüglich der Induktorverluste abgeschätzt, der als Meßwert 2025 kW aufgefaßt wird. P_{KI} stellt die Klemmleistung am Induktor des Rinnenofens dar, die als integrale Bilanz direkt aus Vektor- und skalarem Potential im Induktor berechnet wurde.

	I_{ein} in A	P_{Rin} in kW	P_{Km} in kW	P_{Geh} in kW	P_{Ges} in kW	P_{KI} in kW
Messung	5050	—	43,32	63,77	(2024,9) ¹⁾	—
Rechnung	5000	1852,0	51,4	58,7	1962,1	1894,0
	frel [%]	—	18,6	- 8,0	3,1	—

1) aus Nennleistung minus ohmschen Verlusten gebildet

Tabelle 6.7 Vergleich von Variantenrechnung 3 mit Verlustleistungsmessung

Der Vergleich in Tabelle 6.7 zeigt die bei der Berechnung mit 18,6 % in Bezug auf die Meßwerte etwas höher liegenden Kühlzylinderverluste. Demgegenüber sind die Gehäuseverluste im Vergleich zur Messung 8 % niedriger. Der Fehler bei den Gehäuseverlusten dürfte jedoch bei mindestens 12 % liegen, da die Verluste durch den zusätzlichen Gehäusedeckel noch nicht berücksichtigt wurden. Insgesamt gesehen stimmt das Berechnungsergebnis dennoch recht gut mit den Meßwerten überein.

7. Testbeispiel Kühlzylinder-Modell

Nach der Berechnung des doppelloopigen Induktions-Rinnenofens, die in Kapitel 6 vorgestellt wurde, sollen anhand eines einfachen Modells zusätzliche Aussagen zur universellen Verwendbarkeit für den in Kapitel 3 und Kapitel 4 hergeleiteten FEM-Algorithmus zur dreidimensionalen Wirbelstrom- und Verlustberechnung getroffen werden. Gleichzeitig sollen Aussagen zur Rechengenauigkeit abgeleitet werden.

Die Berechnungsergebnisse für die Modellanordnung werden in 7.2 vorgestellt. In Abschnitt 7.3 sind die für den Vergleich mit den Berechnungsergebnissen notwendigen Meßergebnisse aus den am Modell gewonnenen Leistungsmessungen bei Frequenzen von $f=4000$ Hz bis $f=8000$ Hz enthalten. Die Vergleiche zwischen Wirbelstromverlustleistungsrechnungen und -messungen am Kühlzylinder-Modell werden anschließend in Abschnitt 7.4 geführt.

7.1 Beschreibung der Modellanordnung

Für die Untersuchungen wird ein Modell verwendet, das wie in Bild 7.1 dargestellt, nur aus einer Spule und dem umgebenden Kühlzylinder besteht. Die Modellanordnung wahrt damit die Grundähnlichkeit zum Kühlmantel eines Induktions-Rinnenofens, wie er in Kapitel 2 und Kapitel 6 beschrieben wurde. Die Luftspule vereinfacht die Anordnung wesentlich.

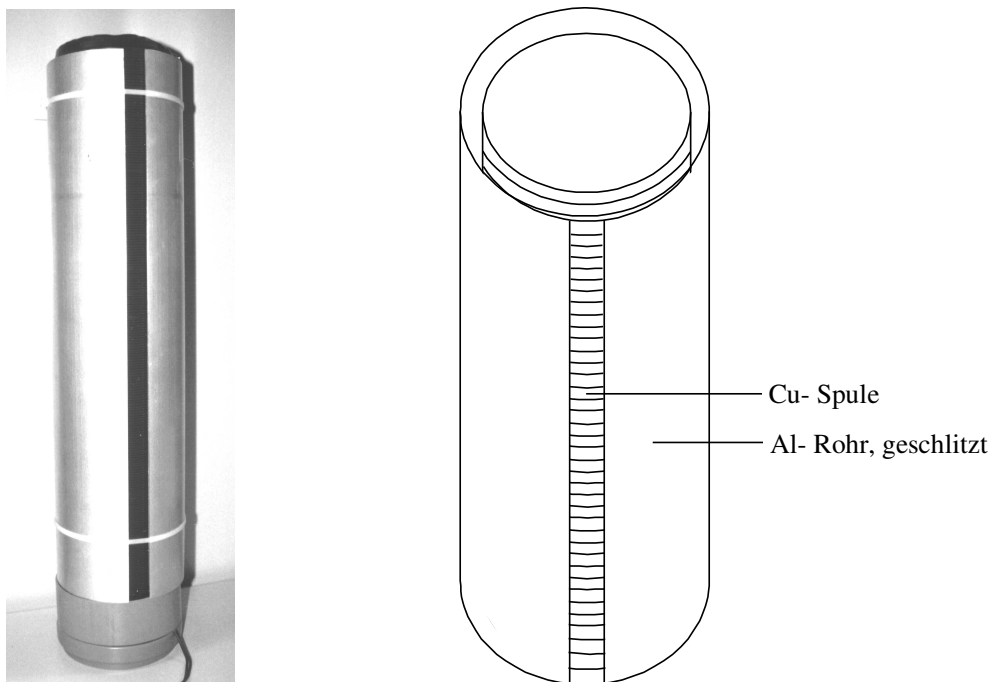


Bild 7.1 Modellanordnung für den Kühlzylinder-Versuch

Das Modell lt.Bild 7.1 weist die folgenden charakteristischen Hauptabmessungen auf:

Spulenlänge:	$L_{sp} = 491 \text{ mm}$	Windungszahl:	$W = 213 \text{ Windungen}$
Innen-Ø Kühlmantel:	$D_{Km} = 119,6 \text{ mm}$	Kühlmantel-Dicke:	$d_{Km} = 3,1 \text{ mm}$
Innen-Ø Spule:	$D_s = 114 \text{ mm}$		
Luftspalt-Kühlmantel:	$S_{Km} = 20 \text{ mm}$		

Um die Einflüsse vom Skineffekt zu vermeiden, wurde als Draht isolierte $0,75 \text{ mm}^2$ Schaltlitze verwendet und auf einen PVC-Grundkörper gewickelt. Der Kühlzylinder besteht aus einem $3,1 \text{ mm}$ dickem gezogenem Rohr aus einer Al/Mg-Knetlegierung. Das Rohr wurde längs an einer Linie aufgeschnitten, so daß der Spalt von 20 mm zwischen beiden Schnittkanten entstand. Die Anordnung stellt daher ein echtes 3D-Modell dar, das nur dreidimensional exakt berechnet werden kann.

7.2 Dreidimensionale Numerische FEM-Berechnung

Vor der dreidimensionalen numerischen Feldberechnung der Wirbelstromverluste mit der Finiten Elemente Methode wird das Modell, wie bereits in Kapitel 5 ausführlich erläutert, in finite Elemente unterteilt. Dabei wird wieder das Makroelementkonzept angewendet. Bild 7.2 zeigt dazu als Beispiel die Makroelementvernetzung in der x-y-Ebene für ein Viertel der Anordnung. Für die späterer Rechnung wird jedoch das Makroelementnetz an der x-Achse nach unten gespiegelt, so daß die Hälfte des Querschnittes in Makroelemente unterteilt wird.

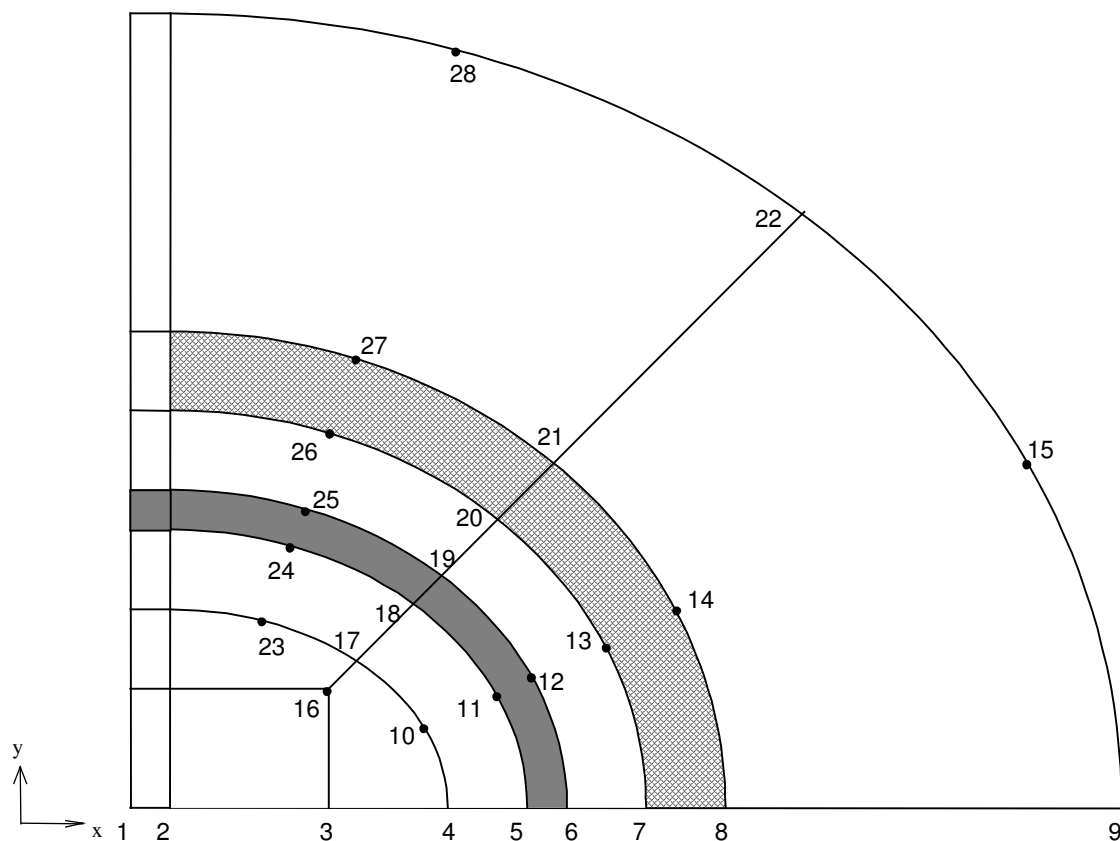


Bild 7.2 Hälfte der Makroelementvernetzung in der x-y-Ebene

Aus dem 2D-Makroelementnetz entsteht anschließend durch Übereinanderschichten zunächst das 3D-Makronetz. Danach wird das 3D-FEM Gitter durch die Unterteilung der 3D-Makroelemente in finite Elemente aufgebaut. Es entsteht das Gitternetz in Bild 7.3, das die finiten Elemente auf der Spulen- und Kühlzylinderoberfläche zeigt. Das Gitter in 7.3 wurde bereits an der z-Achse gespiegelt, so daß nun das Gesamtgebiet der Modellanordnung vernetzt erscheint.

Für die Modellrechnungen mit dem Gitternetz in Bild 7.3, die mit eingprägtem Strom am Induktor durchgeführt werden, sind folgende elektrische Parameter relevant:

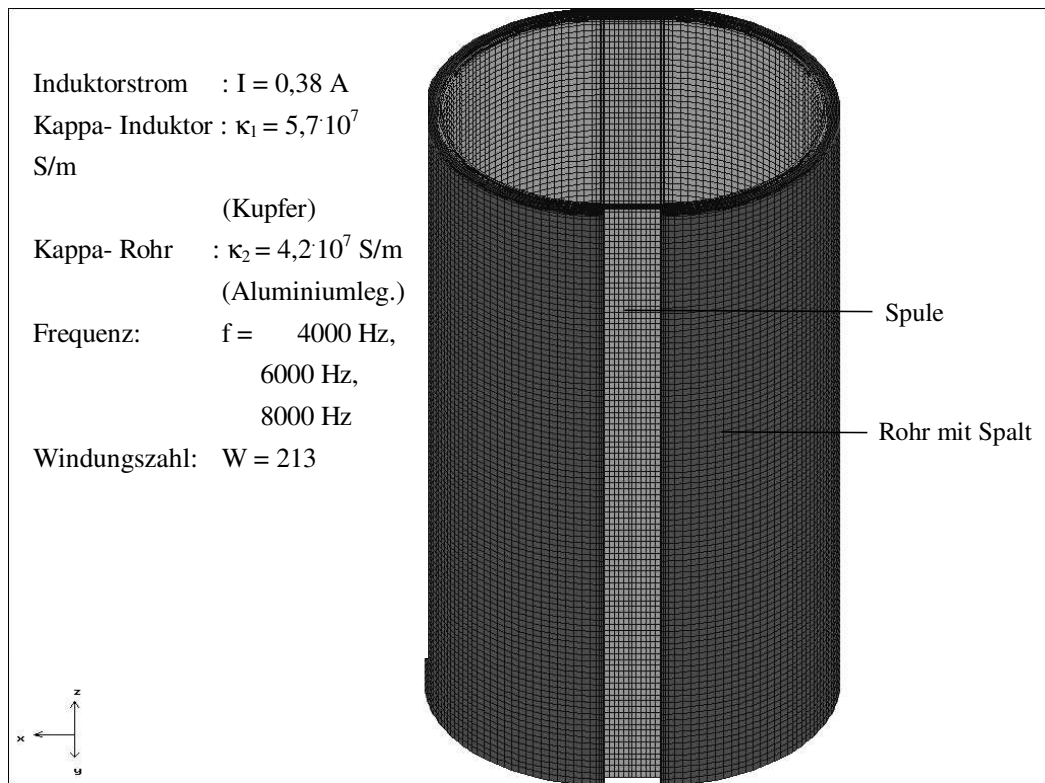


Bild 7.3 Finite Elementnetz auf den Oberflächen im Lösungsgebiet

Für die finite Elemente Rechnung wird auch beim Kühlzylindermodell das Differentialgleichungssystem (3.28) und (3.30) zur Feldbeschreibung genutzt. Bild 7.4 zeigt das Vektorpotential.

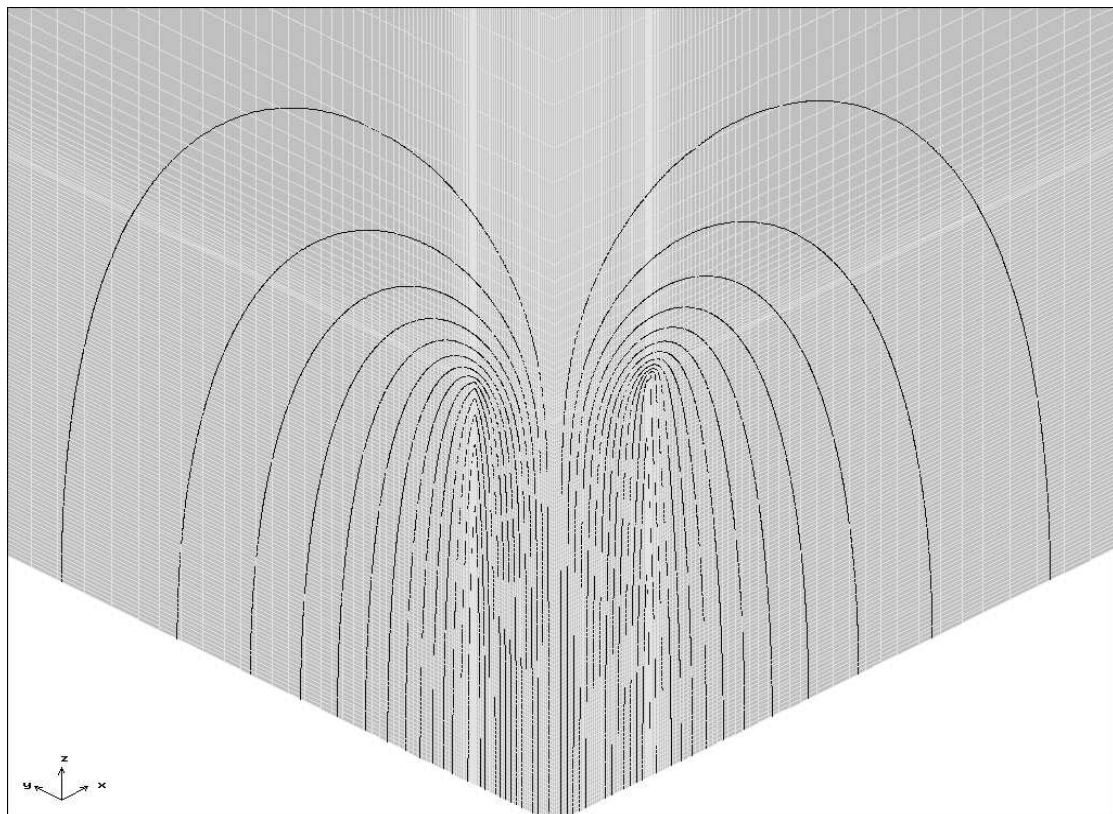


Bild 7.4 Isolinien für das magnetische Vektorpotential im Ausschnitt

Für die Varianten mit 4kHz wurden die Stromverteilungen, wie in Bild 7.5 und 7.6 dargestellt, ermittelt. Deutlich ist der schon bei 4 kHz ausgeprägte Skin-Effekt des Stromes zu erkennen.

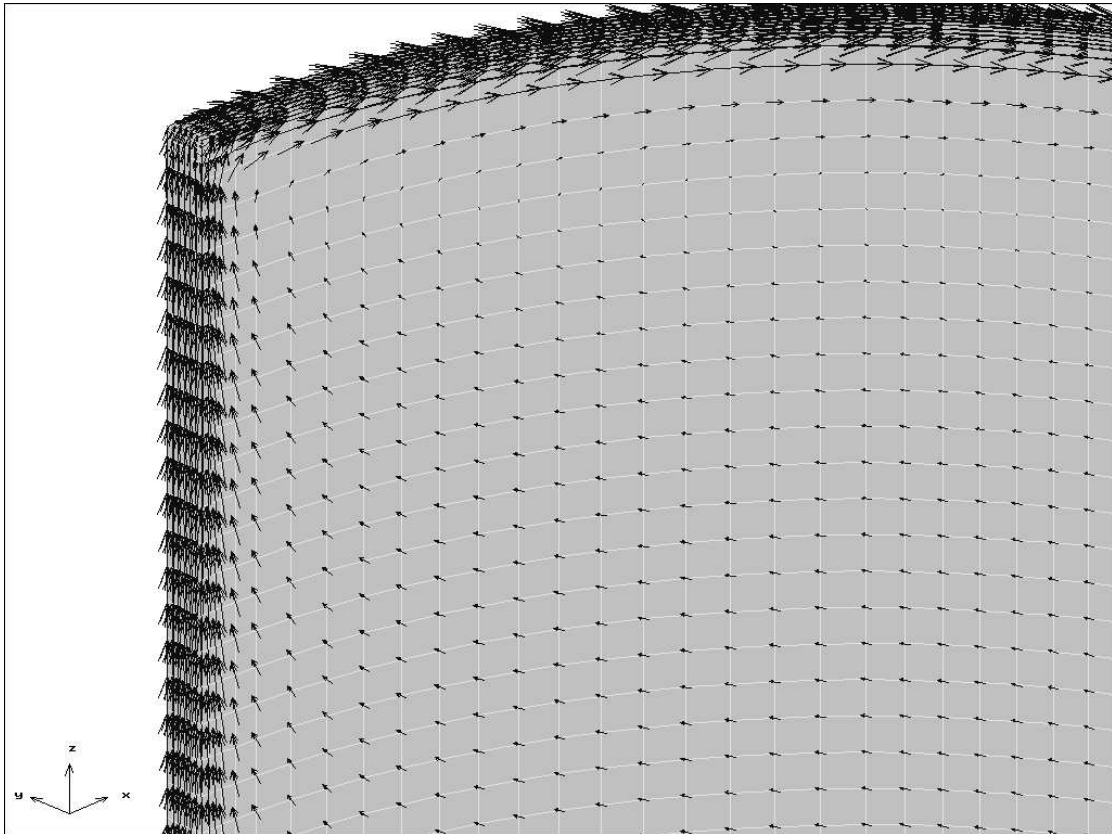


Bild 7.5 Realteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderinnenseite, $f=4000$ Hz

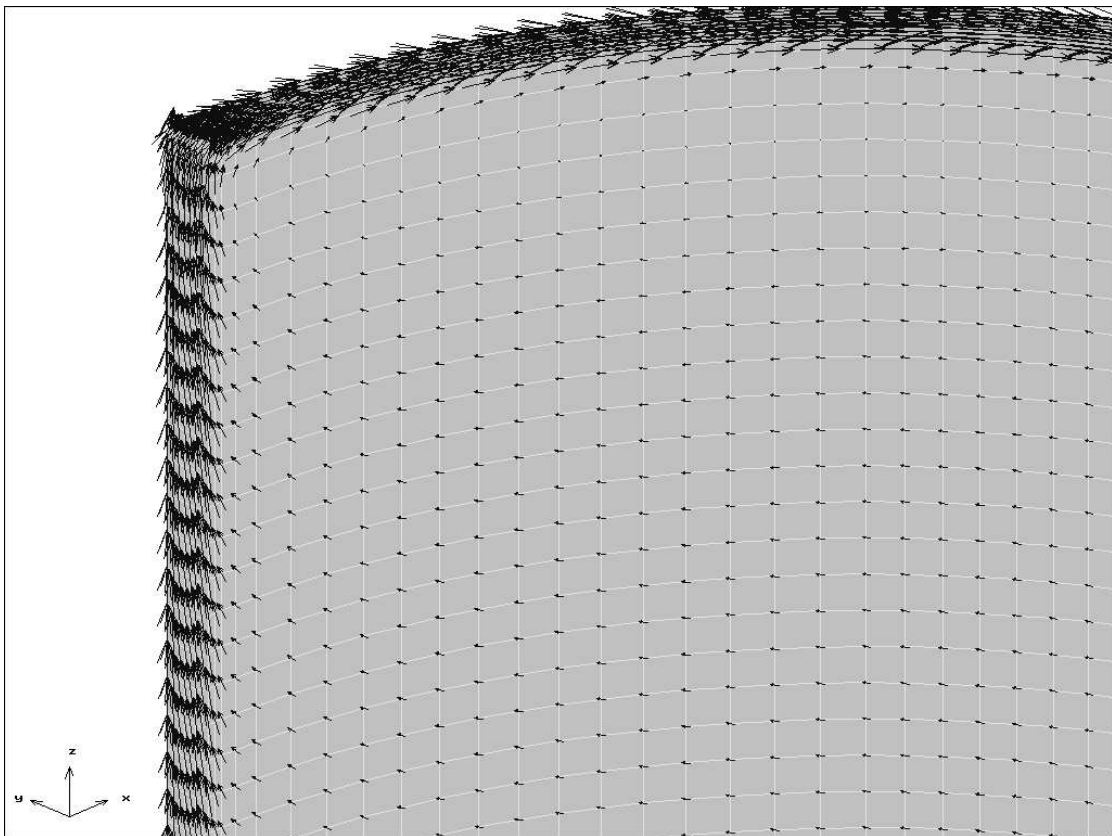


Bild 7.6 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderinnenseite, $f=4000$ Hz

Die Varianten mit $f=6000$ Hz unterscheiden sich in der Stromverteilung nicht wesentlich von den Berechnungen mit $f=4000$ Hz in Bild 7.5 und Bild 7.6 .

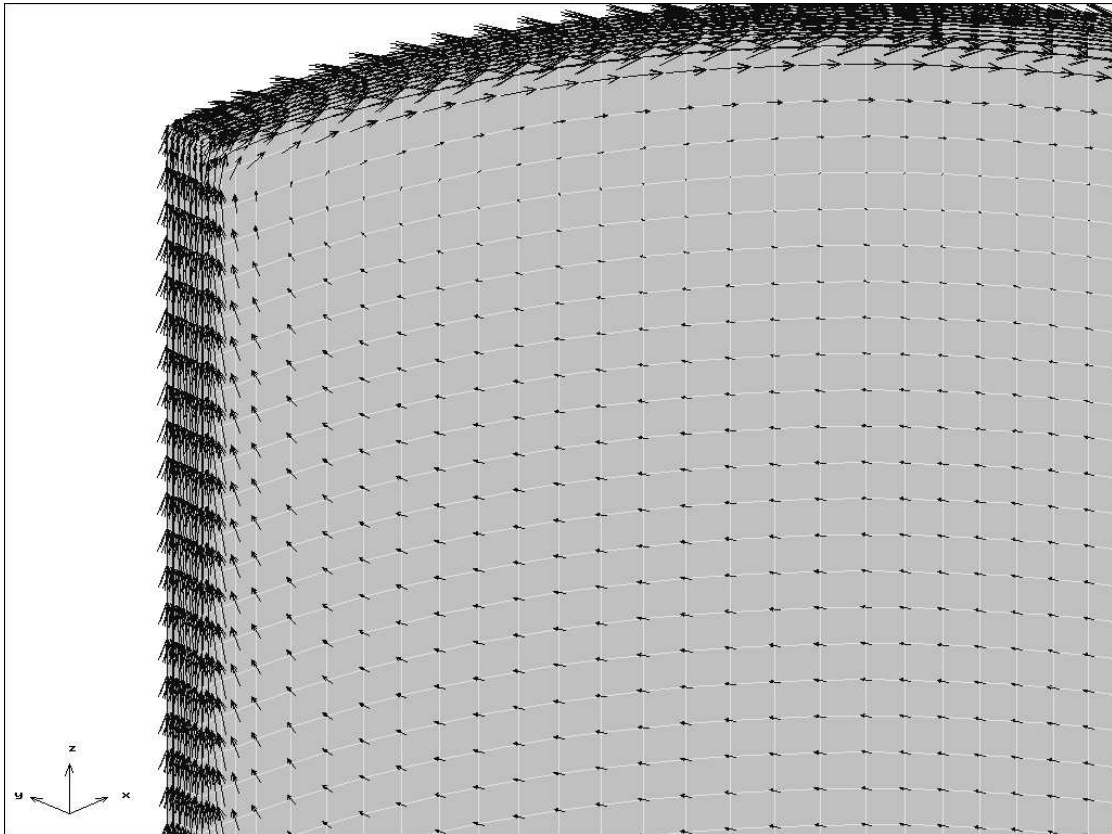


Bild 7.7 Realteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderinnenseite, $f=6000$ Hz

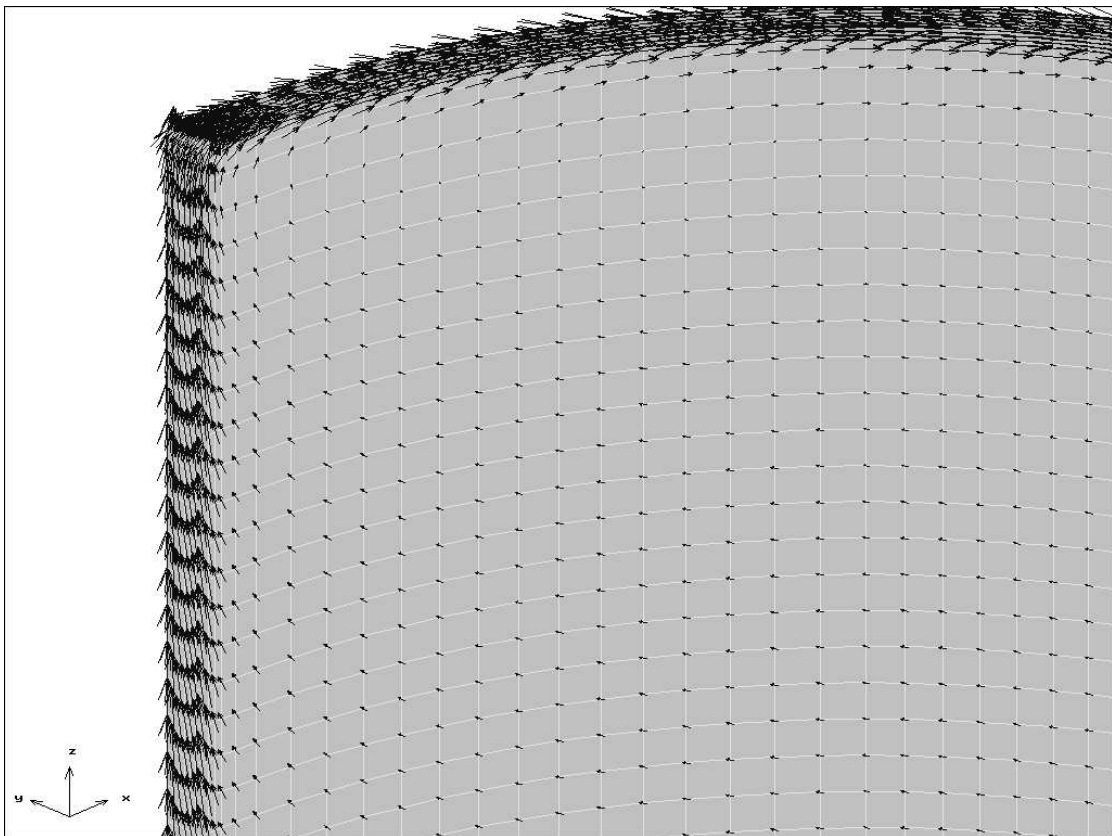


Bild 7.8 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderinnenseite, $f=6000$ Hz

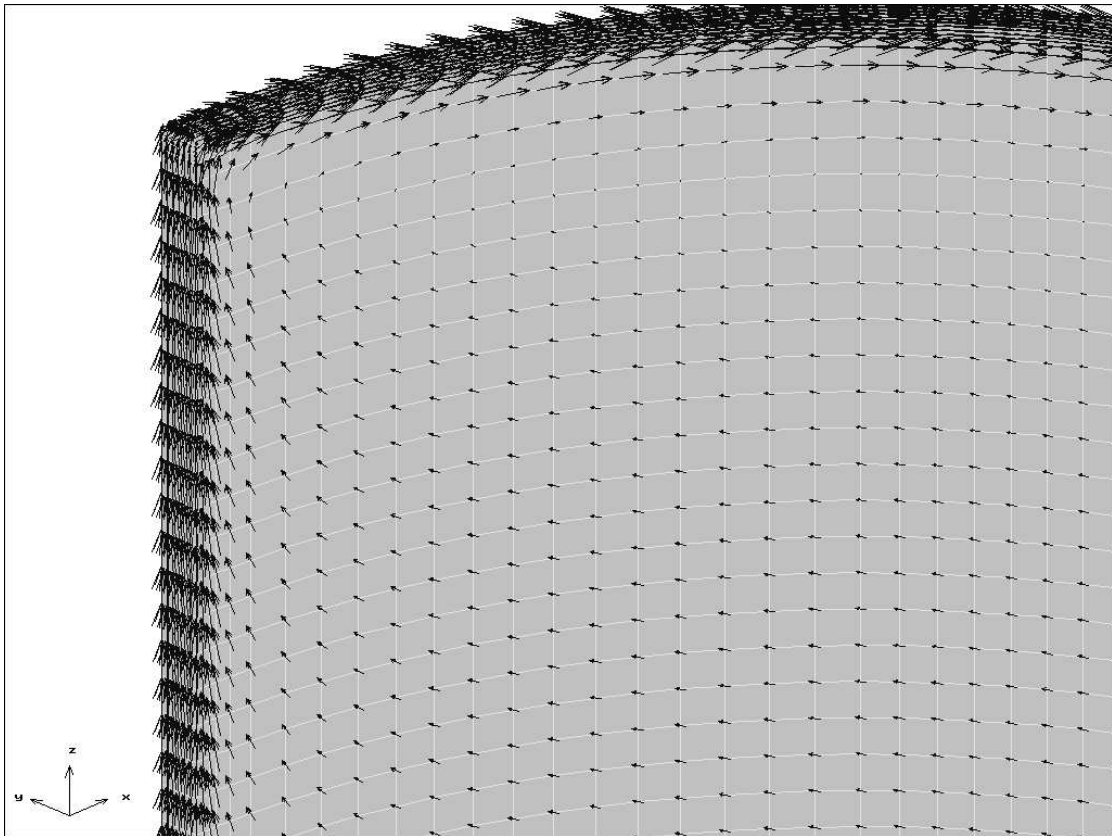


Bild 7.9 Realteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderinnenseite, $f=8000$ Hz

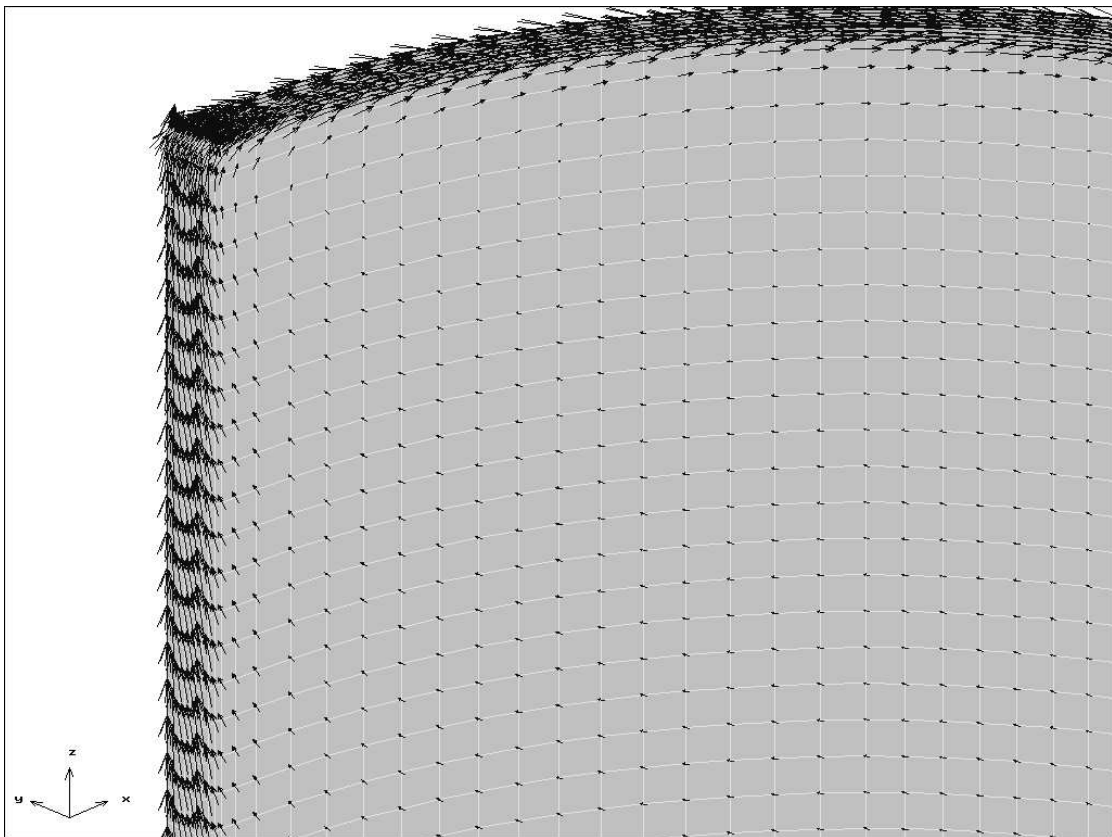


Bild 7.10 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderinnenseite, $f=8000$ Hz

Besonders am Imaginärteil der $f=8000$ Hz Variante, siehe Bild 7.10, lässt sich im Vergleich zur $f=4000$ Hz Variante in Bild 7.6 das weitere Einschnüren der Strombahn am Rand erkennen.

7.3 Verlustleistungsmessungen am Kühlzylinder-Modell

Die verwendete Versuchsschaltung ist in Bild 7.11 dargestellt. Ein variabel einstellbarer Frequenzgenerator liefert ein 4...8 kHz Sinussignal zu einem rauscharmen NF-Verstärker, der dann mit dem verzerrungsfrei verstärkten Signal das Versuchmodell speist. Für die Durchführung der Verlustleistungsmessungen am Modell nach Bild 7.1 wird ein elektronisches Leistungsmeßgerät der Fa. Voltech Instruments Ltd. vom Typ PM3000A verwendet.

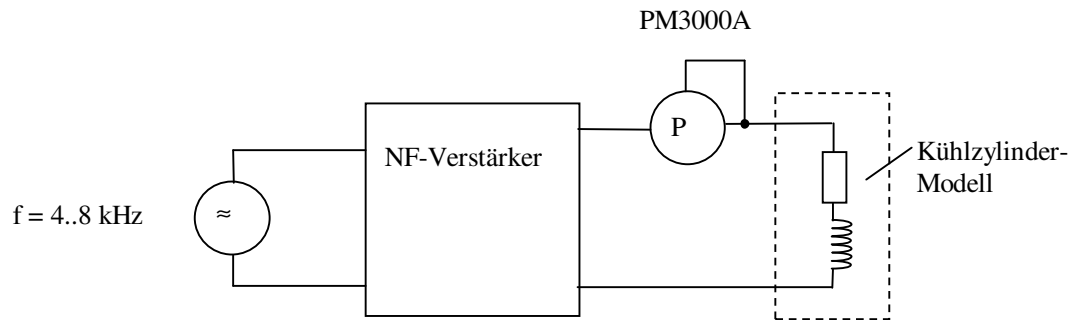


Bild 7.11 Versuchsschaltung zur Leistungsmessung

Das PM3000A arbeitet mit einer Bandbreite von 500kHz. Die Signalverläufe von Strom- und Spannung werden zeitdiskret abgetastet und die Wirkleistung nach Formel (7.1) mit dem integrierten Mikroprozessor berechnet.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (u \cdot i) dt \quad (7.1)$$

Die Scheinleistung wird aus den Effektivwerten von Spannung und Strom ermittelt:

$$S = U \cdot I \quad (7.2)$$

Die Blindleistung wird nach der Beziehung (7.3) aus Wirk- und Scheinleistung abgeleitet.

$$Q = \sqrt{(S)^2 - (P)^2} \quad (7.3)$$

Am Kühlzylindermodell wurden jeweils Messungen mit und ohne Rohr bei veränderten Frequenzen durchgeführt. Die Meßwerte für Strom, Spannung, Wirk-, Blind- und Scheinleistung sind in Tabelle 7.1 enthalten.

f in Hz	P mit KM in W	P ohne KM in W	Q mit KM in VAr	Q ohne KM in VAr
1000	0.256	0.25	0.936	0.956
2000	0.2608	0.253	1.8735	1.9282
4000	0.2661	0.2514	3.756	3.812
6000	0.2675	0.2493	5.649	5.708
8000	0.2686	0.2504	7.51	7.643

Tabelle 7.1 Meßwerte der Leistungsmessungen

7.4 Vergleich zwischen Leistungsmessung und Rechnung

Der Vergleich zwischen den am Modell gemessenen und den mit FEM berechneten Wirkleistungen ergibt eine nahezu Übereinstimmung beider Kurven.

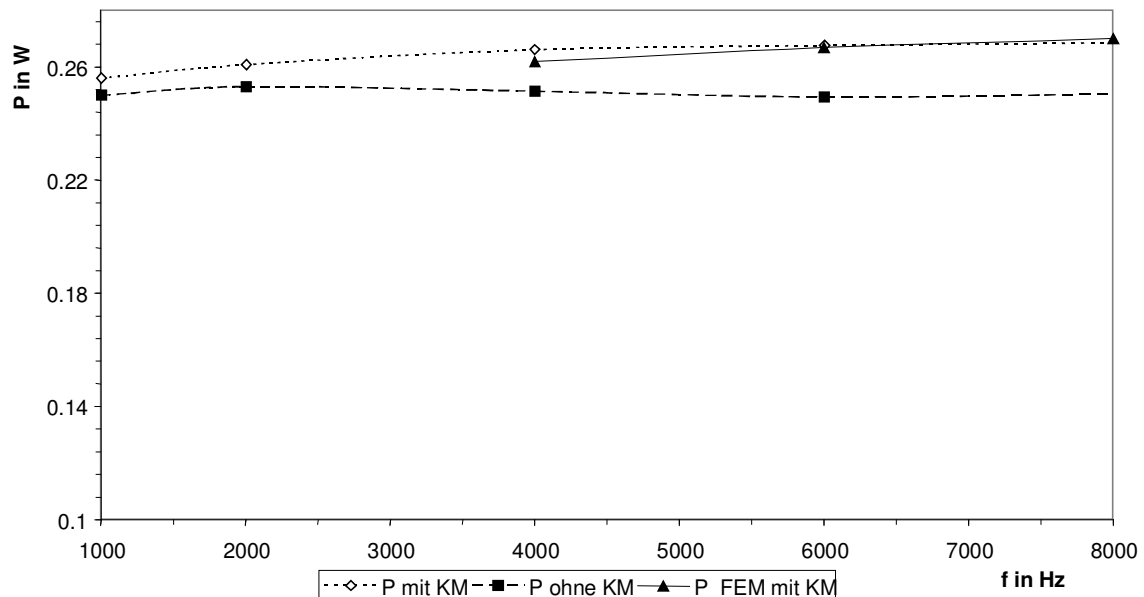


Bild 7.12 Vergleich der Wirkleistungen am Kühlzylinder-Modell

Bei den Blindleistungen treten Abweichungen von ca. 15% bis 20% zwischen dem FEM-Rechenwert und den am Modell gemessenen Blindleistungen auf. Eine mögliche Ursache könnte in den im Rohrspalt liegenden sehr schmalen langgestreckten Plattenelementen liegen, die bei der Elementintegration höhere numerische Fehler begünstigen.

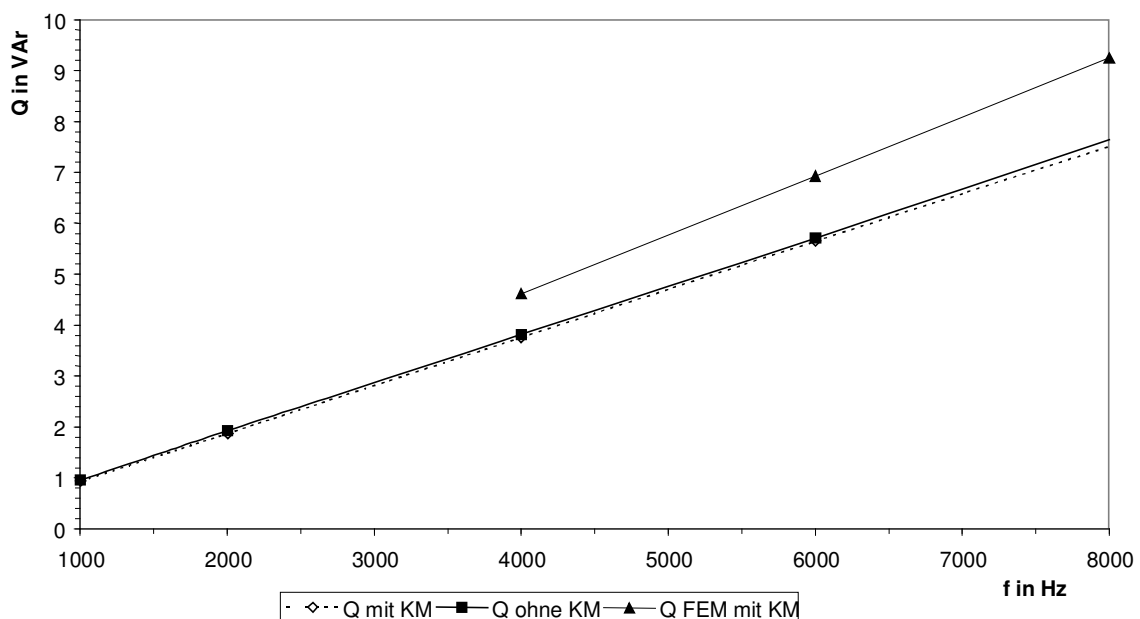


Bild 7.13 Vergleich der Blindleistungen am Kühlzylinder-Modell

8. Lokale Detailuntersuchungen

Bei den in Kapitel 5 vorgestellten 3D-FEM-Berechnungen am Rinnenofenmodell und den nachfolgenden Berechnungen am doppelloopigen Rinnenofen, siehe Kapitel 6, wurde das Lösungsgebiet bisher nur unter Aussnutzung von Symmetrieebenen reduziert. Der numerische Aufwand für die Lösung der Gleichungssysteme mit ca. 2 Millionen Unbekannten liegt mit ca. 6,6 Tagen CPU-Zeit auf der HP-Workstation jedoch für den praktischen Einsatz wesentlich zu hoch, siehe Bild 5.16.

Daher soll nachfolgend untersucht werden, wie auch umfangreiche Problemstellungen bei begrenzter Speicherkapazität der verwendeten Rechanlage und damit logischerweise zugleich begrenzter Element- und Knotenpunktanzahl noch mit der erforderlichen Rechengenauigkeit beherrscht werden können. Dies erfolgt durch die Reduzierung des Gesamtlösungsgebietes auf kleinere Teilausschnitte, die dann mit höherer Detailauflösung, d.h. größerer Elementdichte im Teilgebiet, nach Einlesen von auf den Randflächen abgespeicherten Potentialwerten berechnet werden.

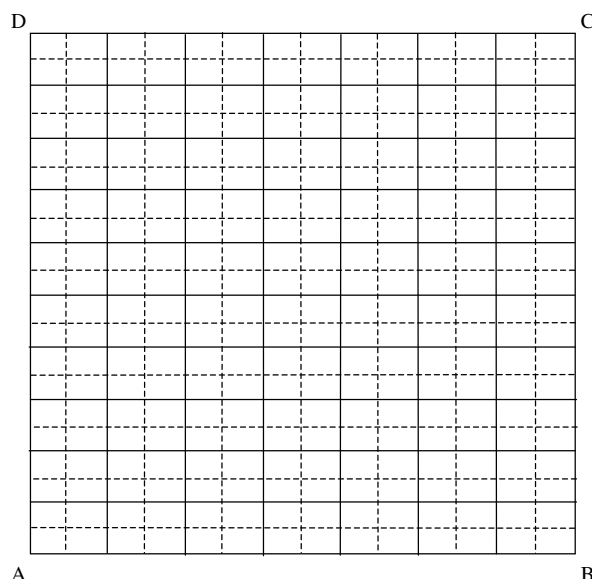
8.1 Reduzierung des Lösungsgebietes auf einen Teilausschnitt

Für das Festlegen des Lösungsgebietsausschnittes gibt es prinzipiell zwei Vorgehensweisen:

Methode 1: Auffinden des Ausschnittes durch Netzverfeinerung im gesamten Lösungsgebiet

Methode 2: Untersuchen der Wirkung von Konstruktionselementen auf die Feldverteilung durch Einfügen/Weglassen von Konstruktionselementen.

Die Gemeinsamkeit beider Methoden liegt darin, daß zunächst zwei Berechnungen im Gesamtgebiet durchgeführt werden und die Veränderung der Potentialwerte an jedem Knotenpunkt erfaßt wird. Diejenigen Knoten, an denen sich die berechneten Feldwerte beider Vergleichsberechnungen nur minimal innerhalb der zulässigen Fehlertoleranz ändern, können später auf dem künstlichen Rand liegen, der das Lösungsgebiet reduziert. Auf diesem künstlichen Rand existieren somit bereits konkrete von Null verschiedene Feldwerte.



Bei der Methode 1 werden nacheinander die Potentialwerte für jeden Knotenpunkt im Lösungsgebiet ABCD mit einem weitmaschigen und einem engmaschigen Gitternetz berechnet, wie Bild 8.1 verdeutlicht. Danach wird an jedem Punkt mit in beiden Netzen übereinstimmenden Koordinaten die relative Abweichung der Potentialwerte ermittelt. Liegt der relative Fehler innerhalb der vorgegebenen Toleranzgrenze so kann das an diesen Punkten berechnete Potential als Randbedingung für die spätere Rechnung gespeichert werden.

Bild 8.1 Rechnung mit weit- (—) und engmaschigem (----) Gitternetz

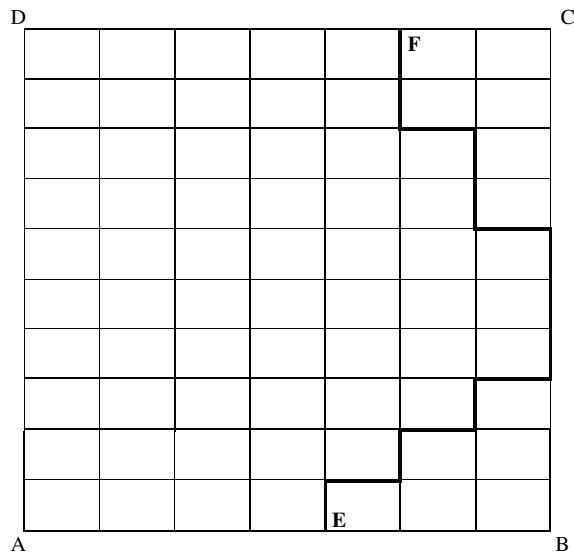


Bild 8.2 Festlegen des künstlichen Randes EF

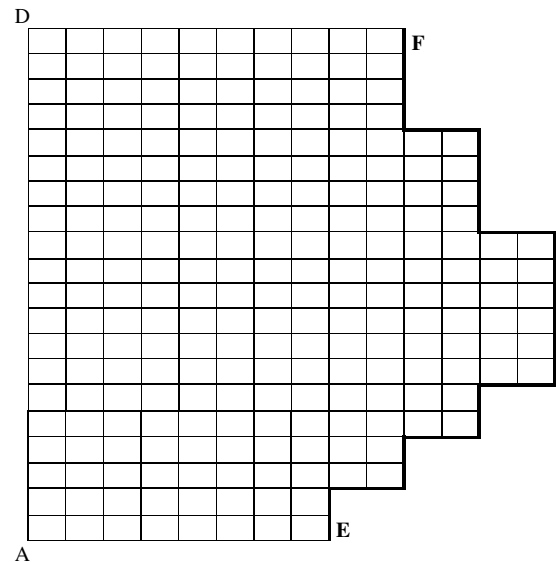


Bild 8.3 Lösungsgebietausschnitt AEFD

Auf diese Weise kann z.B. in das Lösungsgebiet ABCD, siehe Bild 8.2, der künstliche Rand EF eingefügt werden. Die Berechnung mit feinerem Gitternetz erfolgt dann im Lösungsgebietausschnitt AEFD, wie in Bild 8.3 gezeigt wird. Der Ablauf von Methode 1 lässt sich in folgendem Schema zusammenfassen:

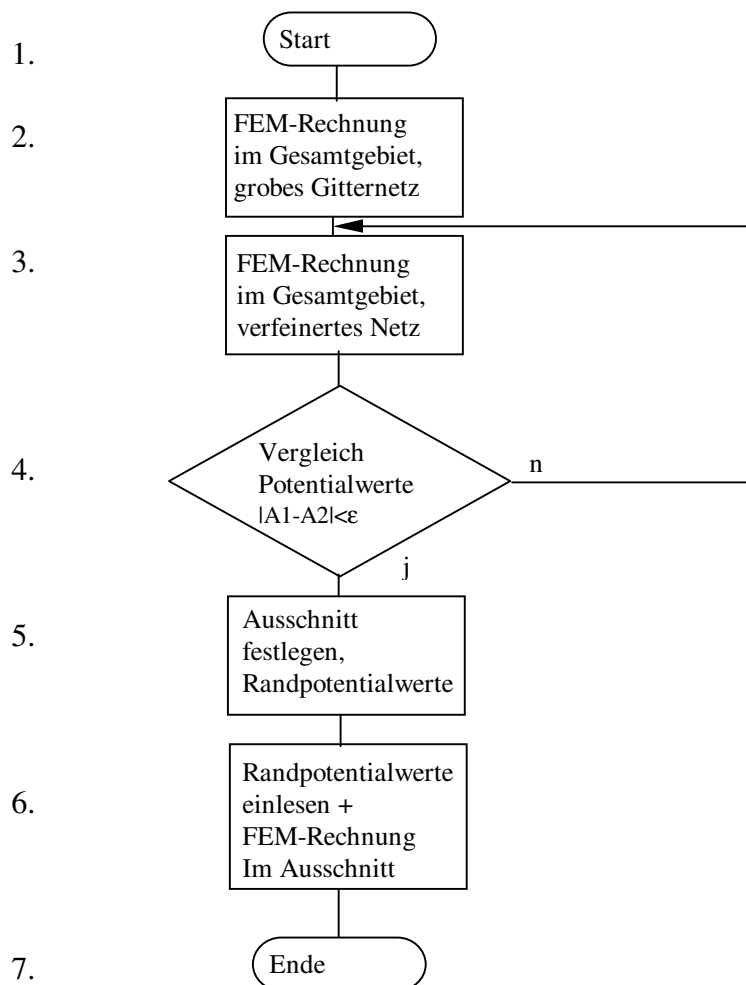


Bild 8.4 Prinzipschema Methode 1

Auffinden des Ausschnittes durch Netzverfeinerung im Gesamtlösungsgebiet

Falls bei der Ausschnittfestlegung nach Methode 1, siehe Bild 8.4, nach der Berechnung mit der ersten Netzverfeinerung die Potentialwerte noch an einer großen Anzahl von Knotenpunkten sehr stark voneinander abweichen, so muß das Gitternetz noch weiter verfeinert werden und die Schleife gegebenenfalls mehrfach durchlaufen werden.

Für die ausschnittsweise Berechnung am Rinnenofen wird die Methode 2 favorisiert, da der Rinnenofen Konstruktionsteile enthält, wie z.B. den geschlitzten Kühlzylinder, die nur eine geringe Rückwirkung auf die Feldverteilung im Lösungsgebiet aufweisen. Die Methode 2 läuft nach folgendem Prinzipschema ab:

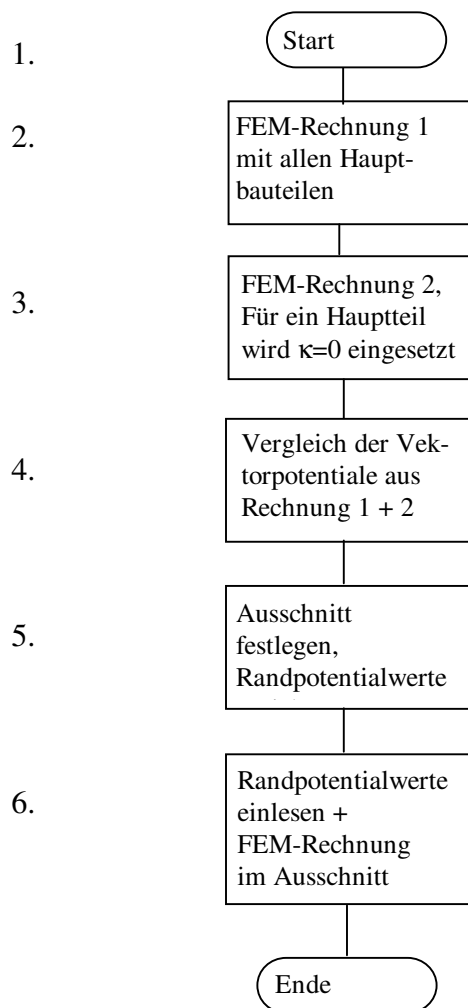


Bild 8.5 Prinzipschema Methode 2

Untersuchen der Wirkung von Konstruktionsteilen auf die Feldverteilung

Im Unterschied zur Methode 1 wird das Gitternetz beim Start der Methode 2 nicht verfeinert, d.h. die Element- und Knotenpunktanzahl bleibt bis zum Festlegen des Lösungsgebietausschnittes konstant. Erst die Berechnung im Lösungsgebietausschnitt erfolgt dann mit engmaschigem Gitternetz.

8.1.1 Zweidimensionales Untersuchungsbeispiel

Zunächst soll die zweite Methode das Auffinden des Lösungsgebietsausschnittes durch Einfügen bzw. Weglassen von Hauptkonstruktionsteilen an einem simplen zweidimensionalen Beispiel vorgestellt werden. Gewählt wird die Anordnung nach Bild 8.6 .

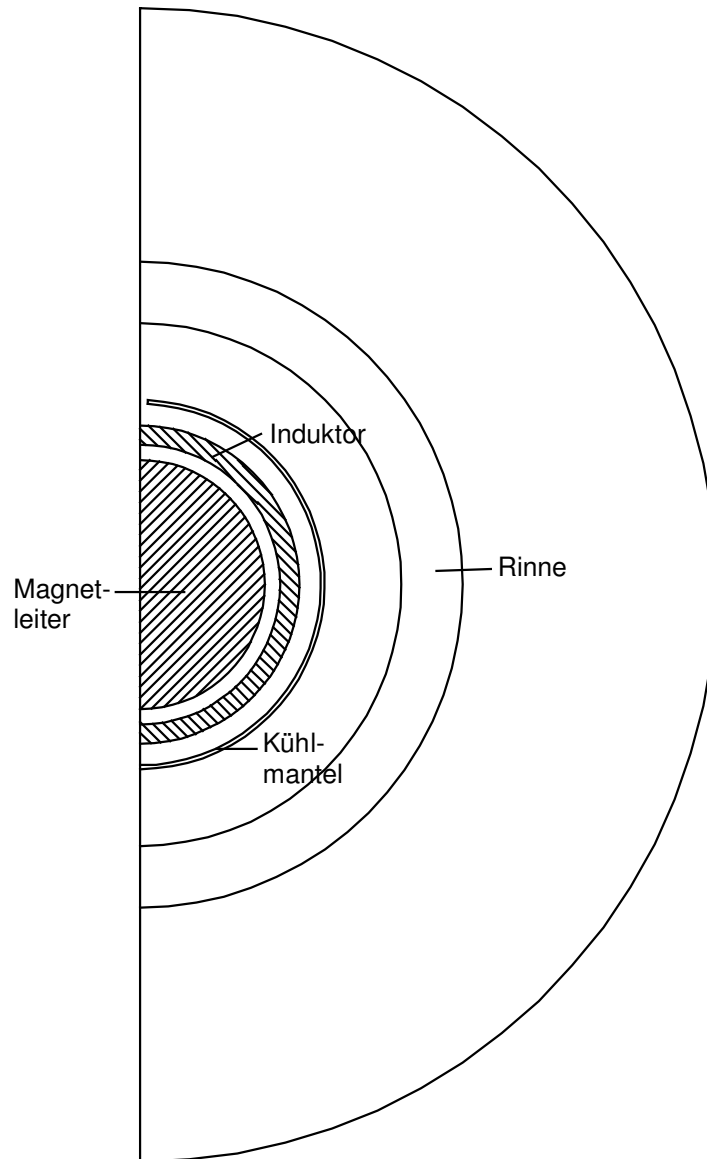


Bild 8.6 Gesamtlösungsgebiet

Die Berechnung wird zunächst im Gesamtlösungsgebiet durchgeführt. Berechnet werden zwei Varianten mit identischem Gitternetz. Die erste Rechnung läuft mit allen in Bild 8.6 eingezeichneten Konstruktionsteilen. Für die zweite Rechnung wird der interessierende Kühlmantel durch Eintragen der Eigenschaft für das Luftgebiet im Lösungsgebiet weggelassen. Für jeden Knotenpunkt werden bei beiden Rechnungen die Potentialwerte abgespeichert und miteinander verglichen, siehe Bild 8.7 und Bild 8.8 .

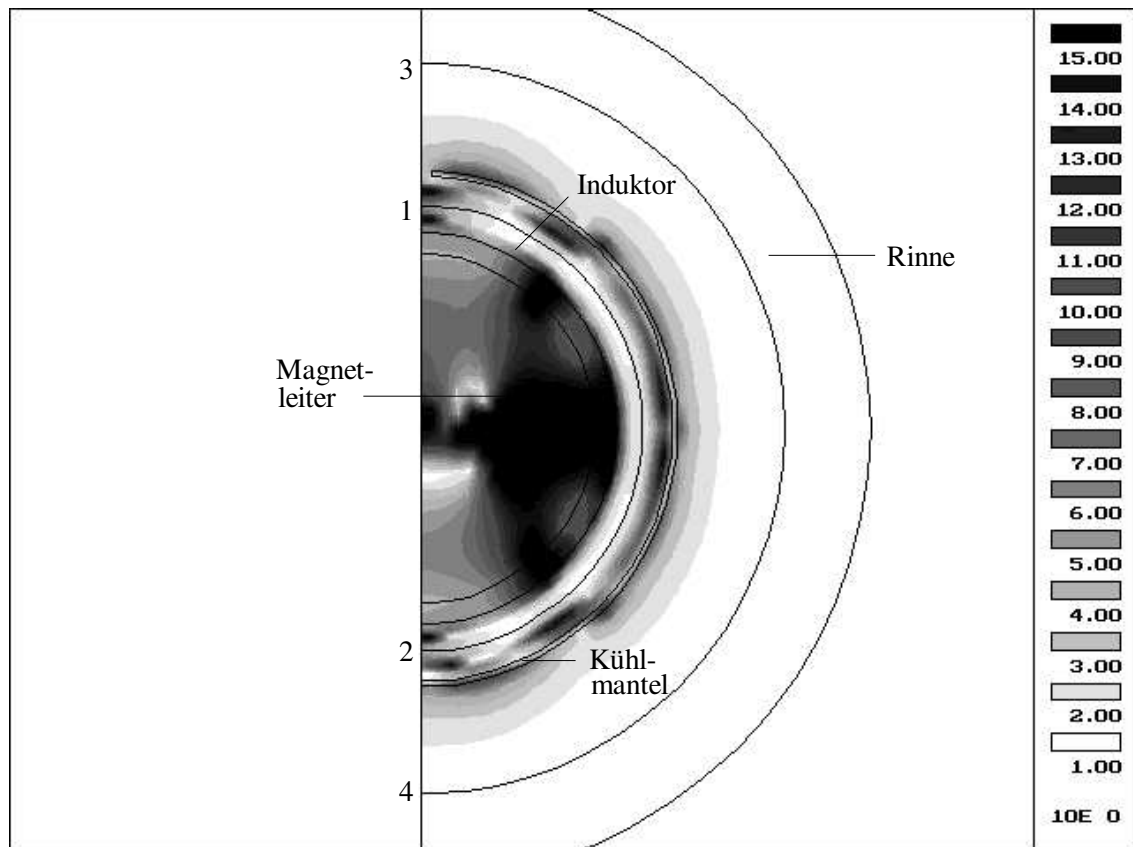


Bild 8.7 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Realteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel

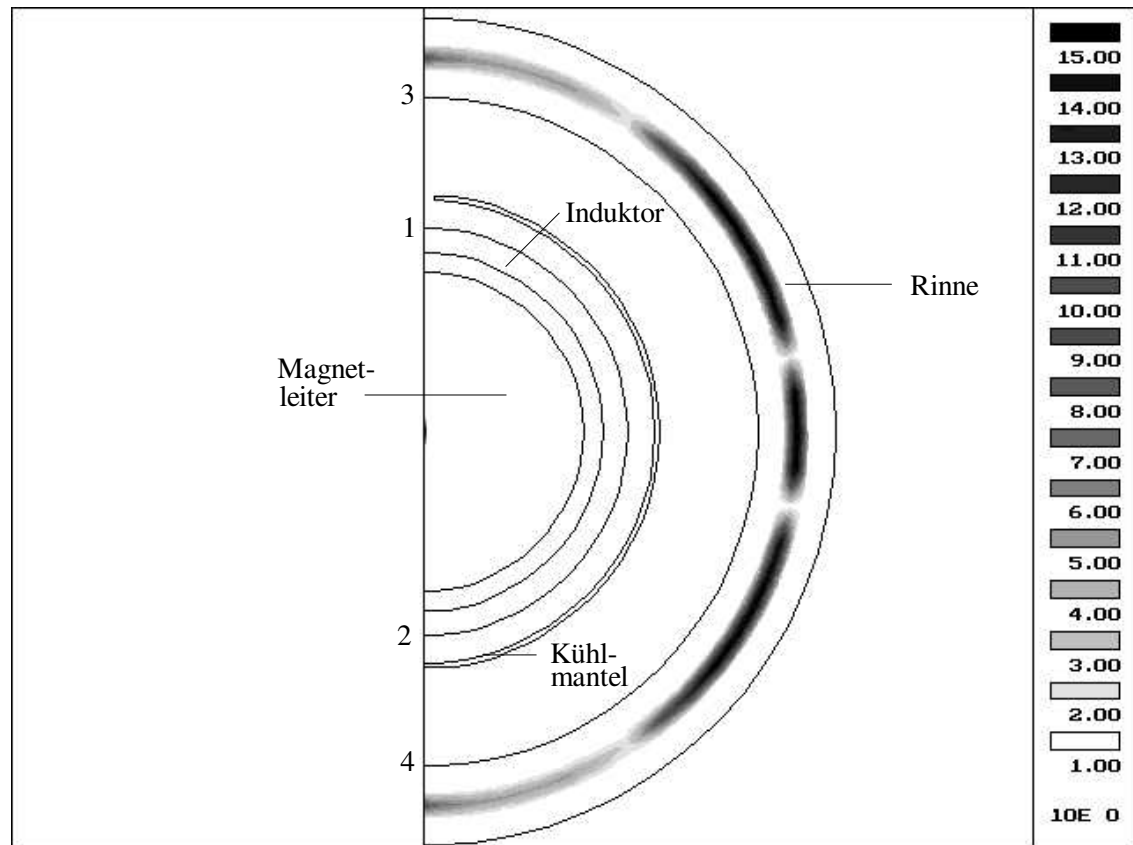


Bild 8.8 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Imaginärteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel

Die Prozentuale Abweichung der Vektor- und Skalarpotentialverteilungen beider Rechnungen, die in Bild 8.7 und 8.8 dargestellt sind, läßt sich für jeden Knotenpunkt $k=1..n$ nach folgender Formel einfach ermitteln:

$$f_{\text{rel}_{k=1..n}} = \frac{\left| \sqrt{\sum_{i=1}^D A_{i_{0k}}^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^D A_{i_{1k}}^2} \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^D A_{i_{0k}}^2}} \cdot 100 \% \quad (8.1)$$

Die Variable i kennzeichnet dabei die Dimension D des Potentials. So ist z.B. für ein vierdimensionales Potential mit x, y, z - und φ -Komponente $i = 4$ einzufügen. Die relativen Fehler werden für Real- und Imaginärteil des Potentials getrennt ermittelt.

Nachdem der relative Fehler für die Knotenpunkte durch Vergleich der Beträge der Potentiale nach (8.1) ermittelt wurde läßt sich daraus die Isoflächendarstellung visualisieren, z.B. anhand einer Farbstufen oder Graustufenverteilung. Anhand der Graustufen können nun sehr schnell die partiellen Bereiche mit den größten Abweichungen, d.h. den stärksten Potentialänderungen aufgefunden werden. Ebenso werden die Teilgebiete im Lösungsgebiet erkannt, an denen sich die Potentialverteilung nicht verändert.

Im zweidimensionalen Beispiel nach Bild 8.7 und 8.8 liegen die Abweichungen für den Realteil des Potentials bei Berechnung mit und ohne Kühlmantel im Bereich 3-4 unterhalb der Rinne eingeschlossen. Beim Imaginärteil ist nur ein Einfluß des Kühlmantels innerhalb der Rinne zu verzeichnen. Für diesen speziellen Fall würde eine Lösungsgebietsbegrenzung auf einen Teilausschnitt der mit der rechten Rinnenkante endet ausreichen, d.h. das außerhalb der Rinne liegende Luftgebiet könnte vollständig weggelassen werden.

8.1.2 Ausschnittsberechnung am einloopigen Rinnenofen-Modell

Um die am einfachen zweidimensionalen Beispiel gewonnenen Erkenntnisse für die dreidimensionale Rechnung zu verifizieren, werden Untersuchungen am Rinnenofenmodell durchgeführt. Als Lösungsgebiet wird die Anordnung in Bild 5.7 verwendet. Auch beim dreidimensionalen Fall werden zunächst wieder Berechnungen mit und ohne Kühlzylinder bei konstantem Gitternetz, d.h. gleicher Element- und Knotenpunktzahl durchgeführt.

Anschließend erfolgt auch hier der Vergleich der Vektorpotential- und Skalarpotentialwerte für jeden Knotenpunkt. Die Isoflächendarstellungen für die Fehlerbilanz müssen dazu sinnvollerweise in verschiedenen xy -, xz - oder yz -Schnittebenen visualisiert werden. Ausgewählte Schnittbilder für die Fehlerbilanzen der Rechnungen mit und ohne Kühlzylinder sind in den Bildern 8.9 bis 8.14 enthalten.

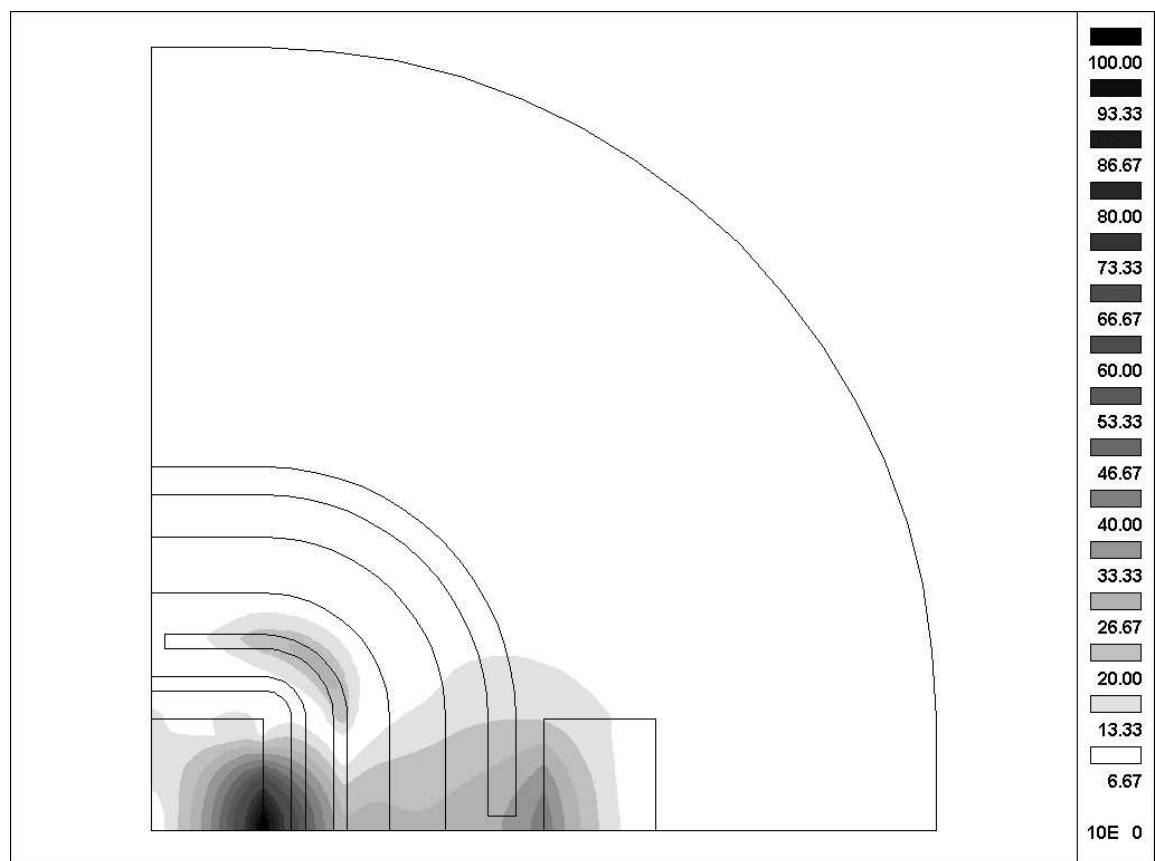


Bild 8.9 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Realteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel, xy-Ebene, $z=10$ mm

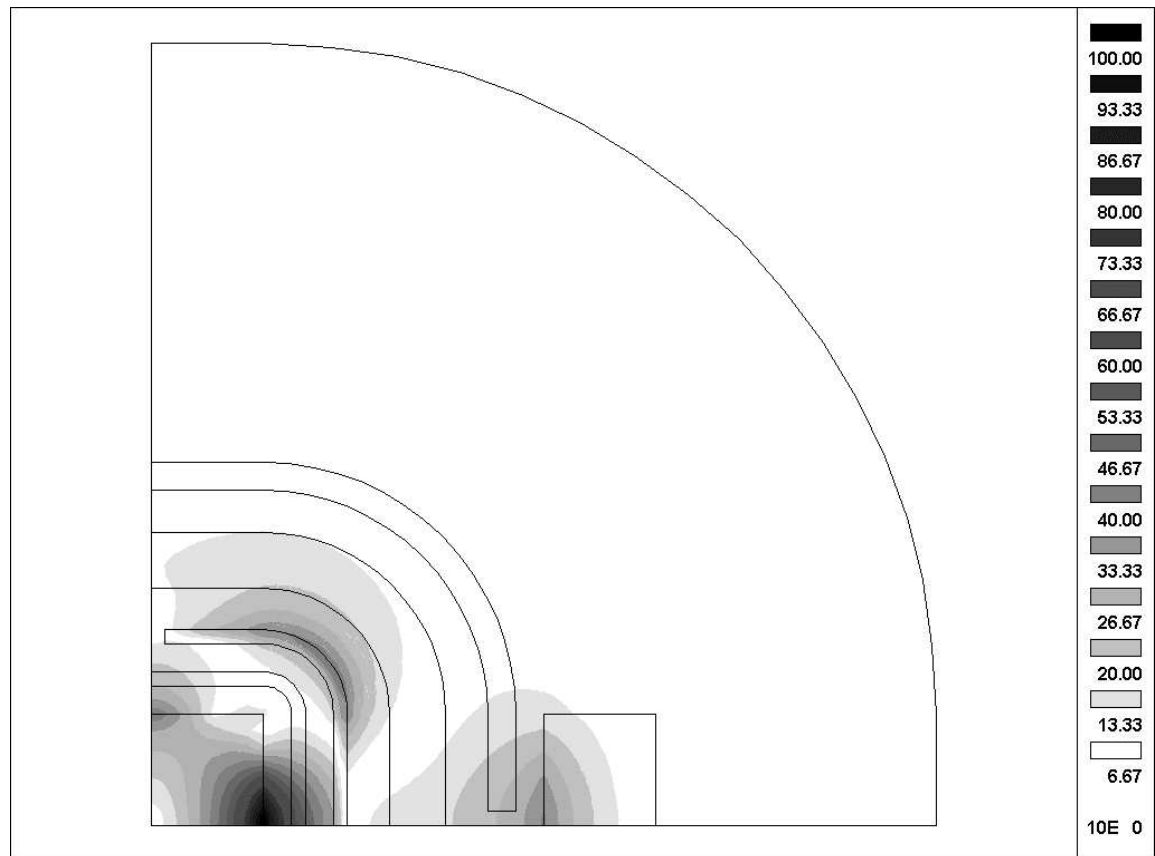


Bild 8.10 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Imaginärteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel, xy-Ebene, $z=10$ mm

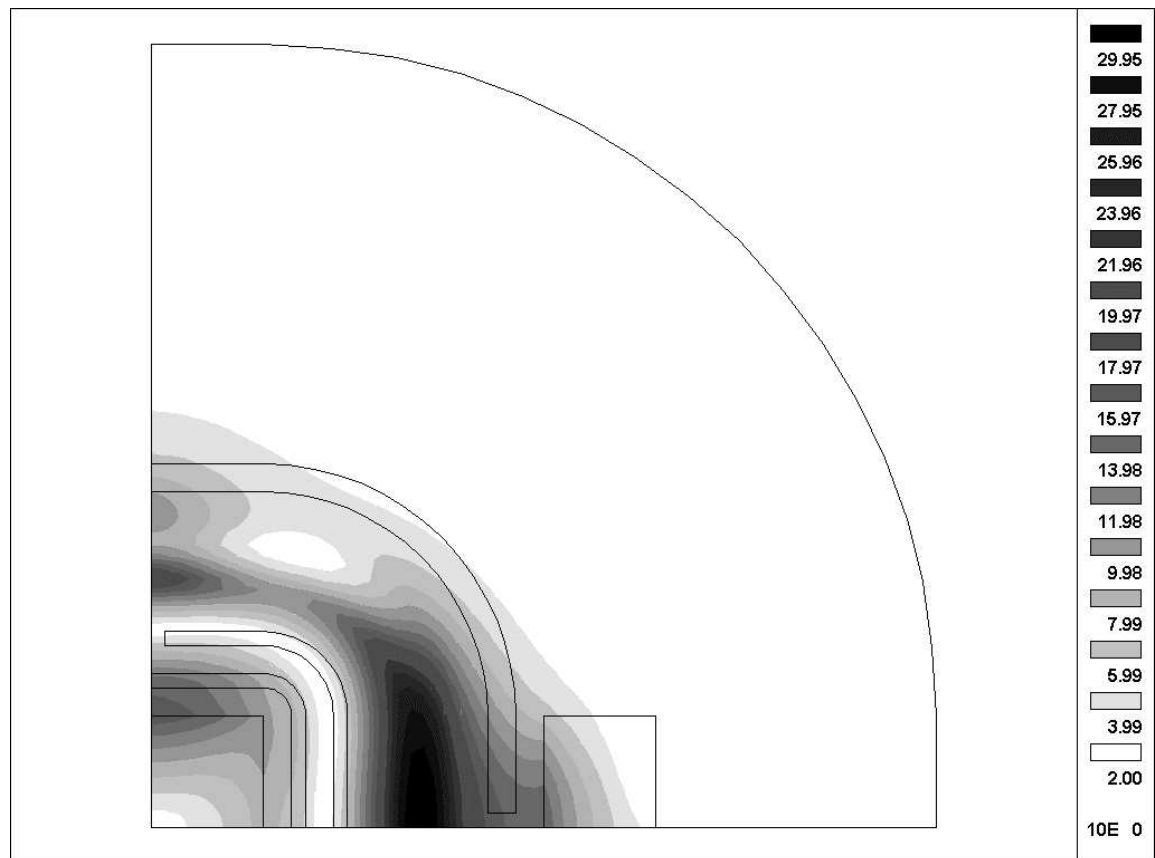


Bild 8.11 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Realteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel, xy-Ebene, $z=100$ mm

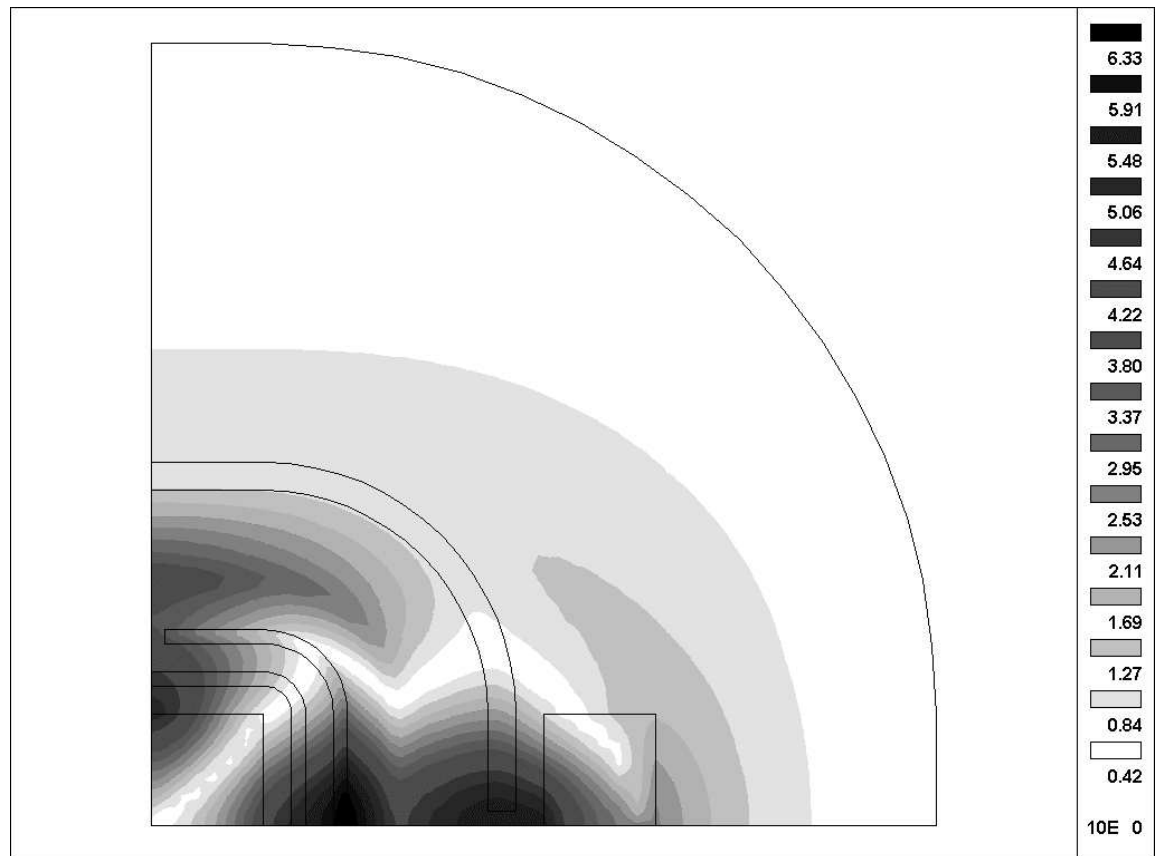


Bild 8.12 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Imaginärteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel, xy-Ebene, $z=100$ mm

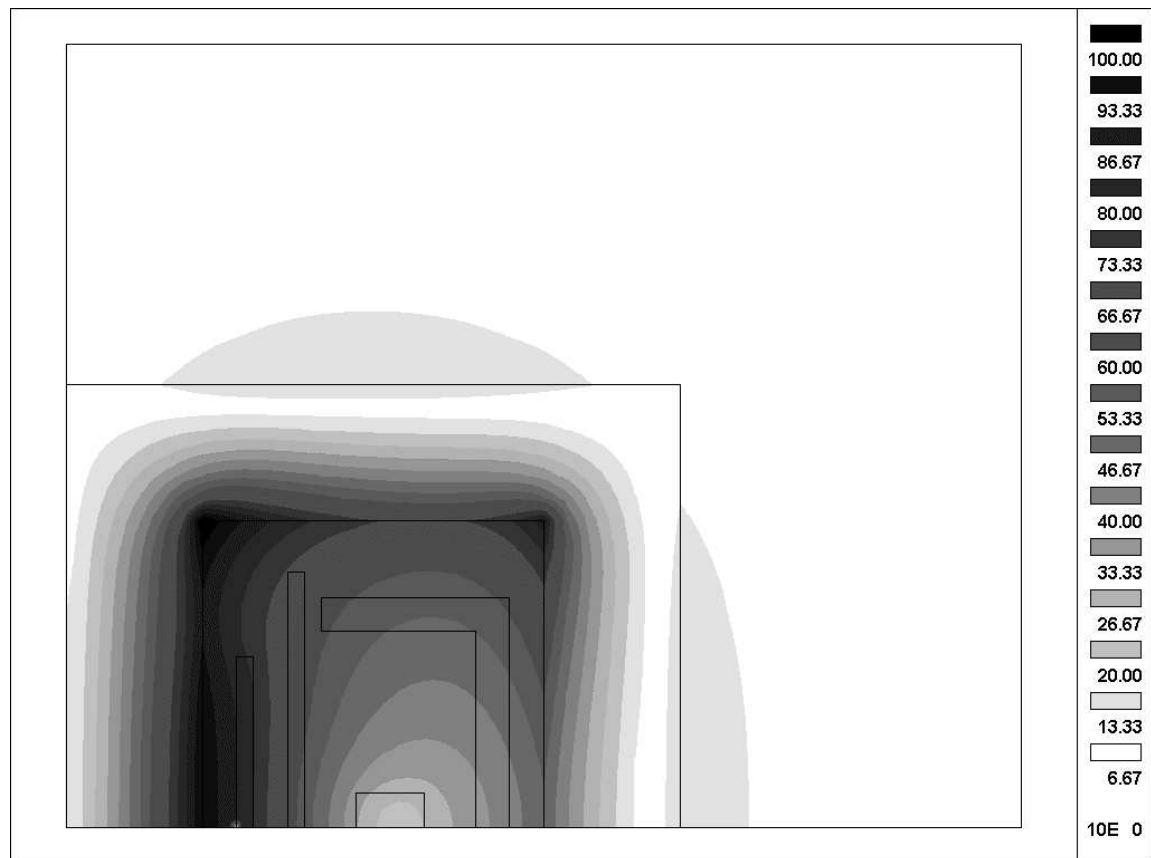


Bild 8.13 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Realteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel, xz-Ebene, $y=10$ mm

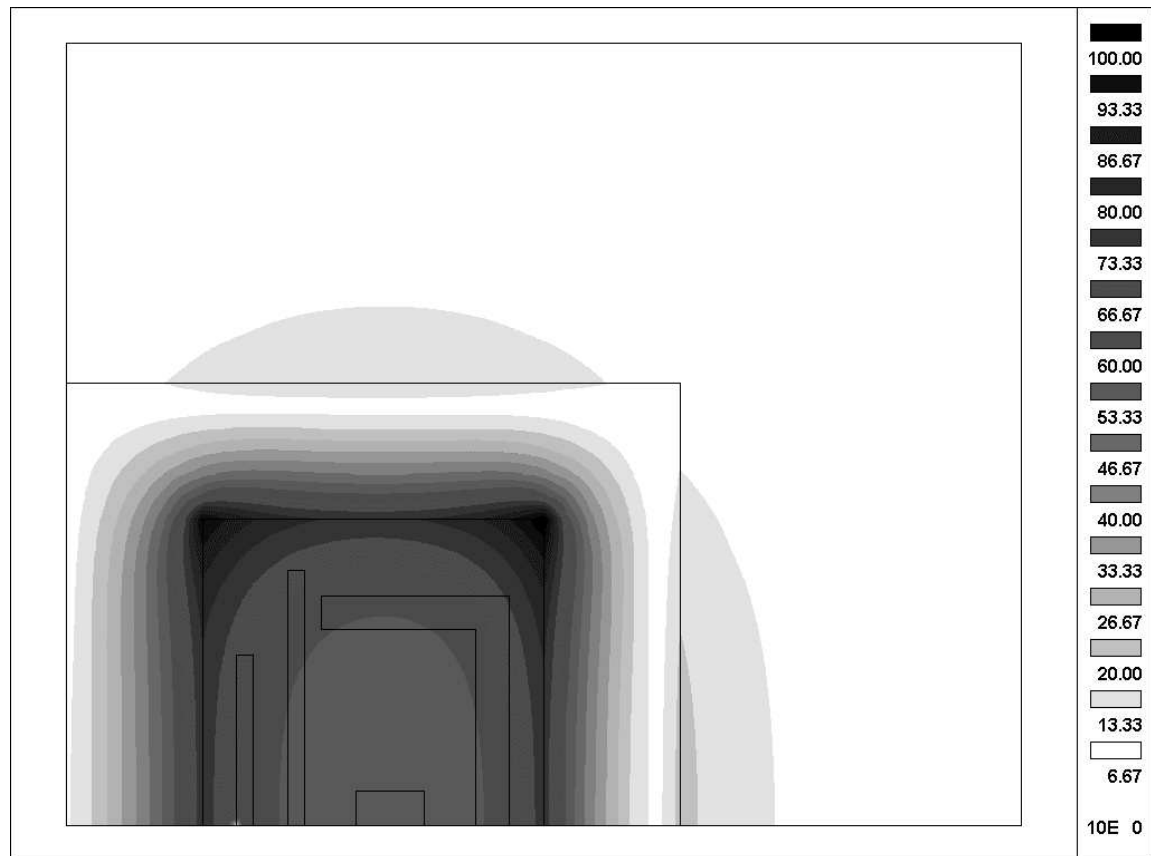


Bild 8.14 Prozentuale Abweichung des magn. Vektorpotentials (Imaginärteil) zwischen Berechnung mit und ohne Kühlmantel, xz-Ebene, $y=10$ mm

Nach eingehender Betrachtung der in den Bildern 8.9 bis 8.14 gezeigten Vergleiche für die Potentialverteilungen am Rinnenofenmodell bei Berechnung mit und ohne Kühlzylinder stellt man fest, daß sich das kombinierte Vektorpotential im Bereich außerhalb des Magnetleiters dabei um $<10\%$ unterscheidet. Für den Lösungsgebietsausschnitt kann deshalb vom Gesamtgebiet ausgehend das Luftgebiet oben und außerhalb vom Magnetleiter abgeschnitten werden. Man erhält die Anordnung nach Bild 8.15. Der Teilausschnitt endet in der Höhe mit dem Magnetleiter und schließt nach außen auch mit dem Magnetjoch ab.

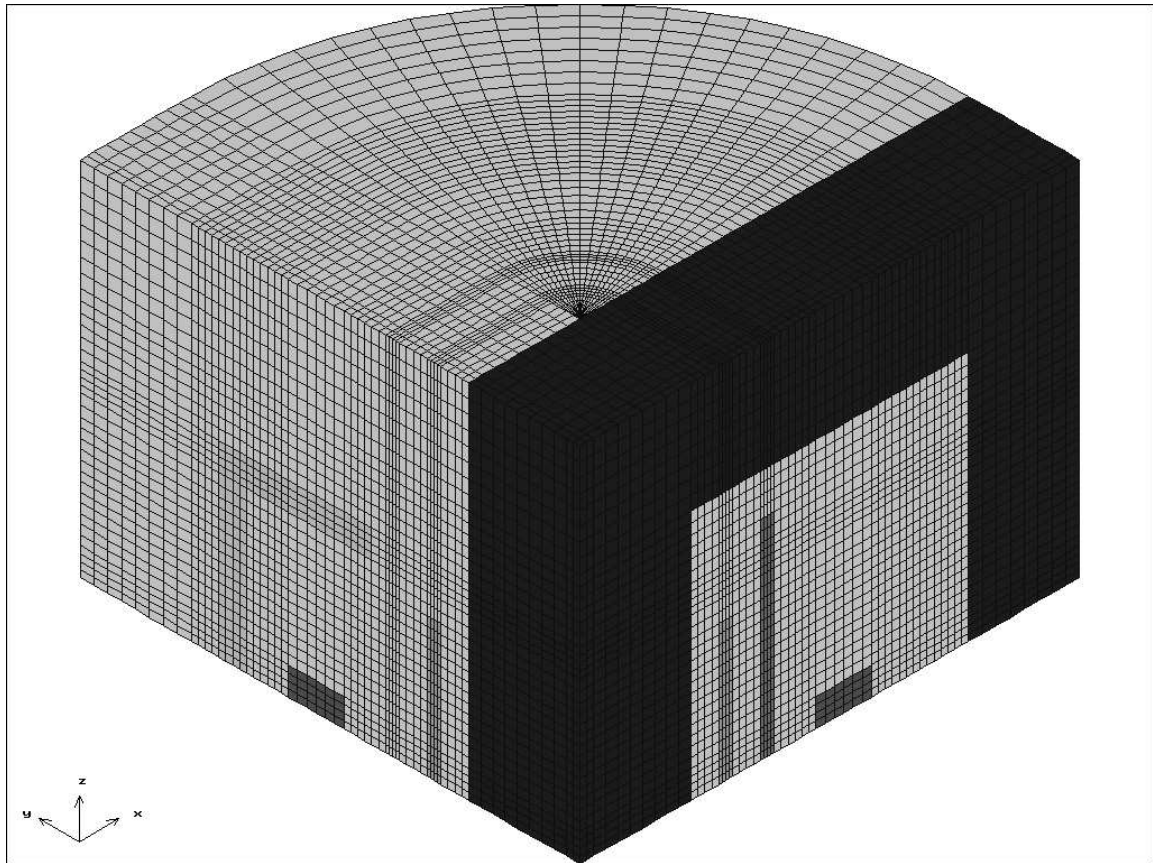


Bild 8.15 Lösungsgebietsausschnitt vom Rinnenofenmodell

Die Berechnung der elektromagnetischen Feldverteilung in den Detailelementen vom Lösungsgebietsausschnitt und die Wirbelstromverlustberechnung erfordert folgende Schritte:

1. Feldverteilung im Gesamtgebiet rechnen
Lösungsgebiet enthält nur die Hauptkonstruktionselemente
2. Feldverteilung im Gesamtgebiet erneut rechnen
Lösungsgebiet enthält alle Konstruktionselemente
3. Potentialverteilungen beider Rechnungen vergleichen
4. Ausschnitt festlegen
Potentialverteilung auf Außenrand speichern
5. Feldverteilung im Ausschnitt mit größerer Knotenpunktdichte rechnen
Ausschnitt enthält Detailelemente mit höherer Auflösung

8.1.3 Reduzierung des dreidimensionalen Rinnenofen-Lösungsgebietes

Auf der Grundlage der in Abschnitt 8.1.1 und 8.1.2 vorgenommenen Untersuchungen zur ausschnittswisen Berechnung wird beim Induktions-Rinnenofen, siehe Kapitel 6, das Teilgebiet um den Kühlzylinder herum partiell feiner vernetzt und neu berechnet. Dies ist notwendig, da die Auswertung der Strombilanz über die Querschnittflächen vom Kühlmantel in der xz -Symmetrieebene nach Tabelle 6.3 bis 6.5 mit 6,5 % Abweichung bezogen auf den eingepprägten Induktorstrom von 5000 A relativ hoch sind.

Vor der numerischen Rechnung im Ausschnitt wird zunächst wieder eine Rechnung mit dem ursprünglichen Gitternetz im Gesamtgebiet durchgeführt. Die Werte des magnetischen Vektor- und Skalarpotentials werden für die Oberfläche des Lösungsgebietsausschnittes gespeichert. Für den Ausschnitt wird dabei folgende Anordnung nach Bild 8.16 benutzt.

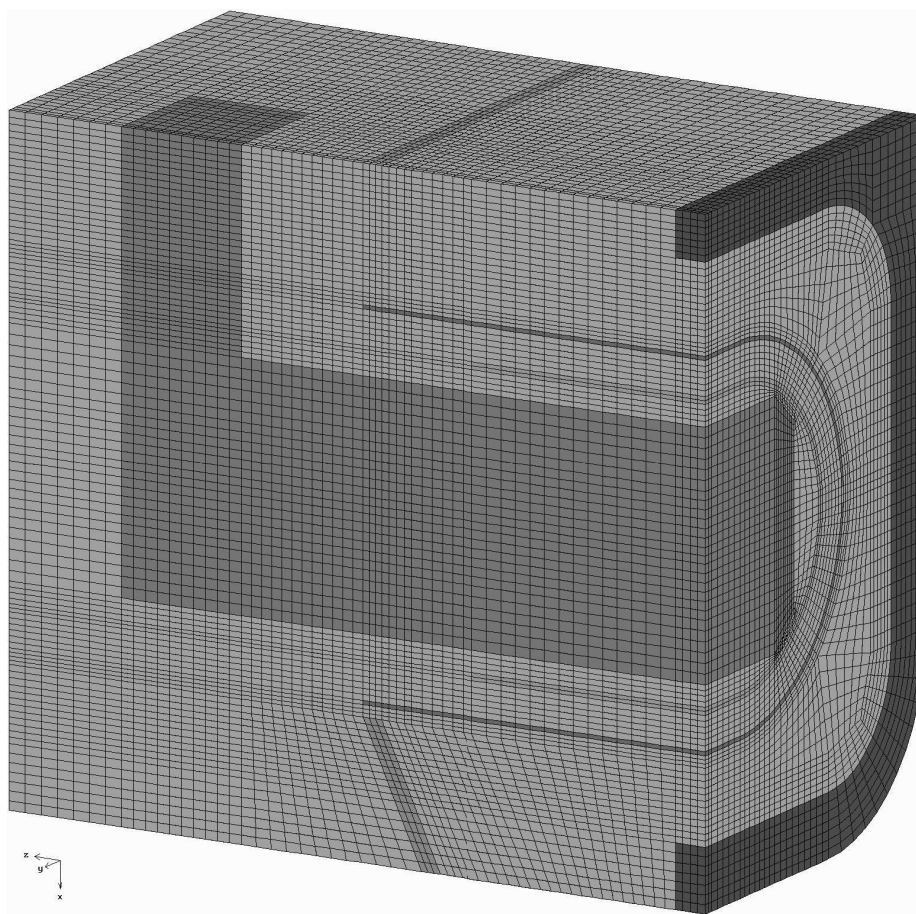


Bild 8.16 Gitternetz vom Lösungsgebietsausschnitt

Da auf der Ausschnittoberfläche jedoch mehr Knotenpunktkoordinaten aufgrund der feineren Vernetzung vorhanden sind, müssen für die fehlenden Knotenpunkte Zwischenwerte für Vektorpotential und Skalares Potential gebildet werden. Die Zwischenwertberechnung erfolgt über die Finite Elemente Formfunktionen des verfeinerten Lösungsgebietsausschnittes. Die approximierten Potentialwerte stehen dann als Randbedingungen erster Art für die Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems (3.28) und (3.30) im Lösungsgebietsausschnitt zur Verfügung .

Für die Durchführung der Wirbelstrom- und Verlustberechnung wurde der Lösungsgebietsausschnitt in Bild 8.16 in 213.060 Hexaederelemente mit insgesamt 222.955 Knotenpunkten vernetzt.

Bild 8.17 zeigt die mit der partiell feineren Vernetzung aus Bild 8.16 auf der Kühlzylinderoberfläche ermittelte Stromverteilung.

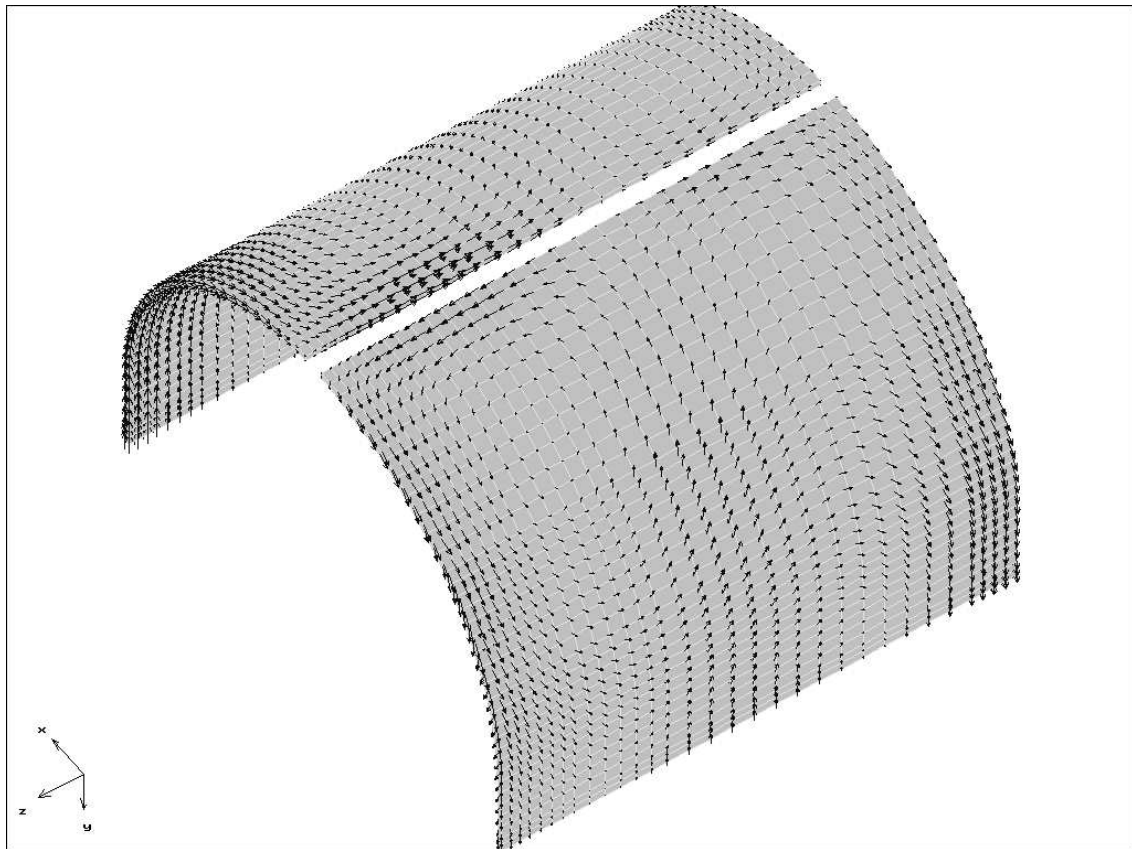


Bild 8.17 Realteil der Stromdichte auf der Kühlmanteloberfläche im Ausschnitt

8.2 Vergleich zur Berechnung im ursprünglichen Lösungsgebiet

Zur Veranschaulichung der Veränderungen bei der ausschnittswisen Rechnung im Vergleich zur ursprünglichen Berechnung im Gesamtgebiet sind in Tabelle 8.1 die berechneten Wirbelstromverlustleistungen im Kühlzylinder und die in der Rinne umgesetzten Wirkleistungen für die Rinnenofenvariante 1 und die entsprechende ausschnittsweise Variante 1A gegenübergestellt.

Variante	P_{Rin} in kW	P_{Km} in kW	P_{Geh} in kW
Ursprüngl. 1	1874,2	46,0	89,5
Ausschnitt 1 A	1942,5	45,1	—

Tabelle 8.1 Berechnete Wirbelstromverlustleistungen

Aus dem Vergleich der Ergebnisse von Tabelle 8.1 wird deutlich, daß durch die feinere Vernetzung des Kühlzylinders die im Kühlzylinder berechnete Wirkleistung etwas geringer wird. Der Vergleich von Rechnung und Meßwerten in Abschnitt 6.4.2 zeigt, die ausschnittsweise Berechnung mit lokal feinerer Vernetzung liefert das genauere Ergebnis für die im Kühlzylinder auftretenden Verluste. Damit wird am praktischen Beispiel des Rinnenofens bestätigt, daß die partielle Berechnung von Lösungsgebietsausschnitten bei komplizierten Anordnungen, wie z.B. dem Kühlzylinder der Induktoreinheit, unter Nutzung der Randbedingungen für Vektor- und Skalarpotential aus einer vorangegangenen Rechnung mit groberer Vernetzung einsetzbar ist.

Dies erscheint besonders wichtig unter dem Aspekt begrenzter Speicherkapazitäten und damit begrenzter Element- und Knotenpunktanzahlen, wie sie z.B. bei Einsatz von PC-Technik für die FEM-Berechnung auftreten kann.

Um das positive Ergebnis aus der Verlustleistungsberechnung im Lösungsgebietausschnitt weiter hervorzuheben, werden in Tabelle 8.2 die Strombilanzen für die ursprüngliche Variante mit grobem Gitternetz und die Berechnung im Ausschnitt mit feinerer Vernetzung verglichen.

		Rinne		Kühlmantel	
		I_{re} in A	I_{im} in A	I_{re} in A	I_{im} in A
Ursprüngl. 1	$x > 0$	4704,7	70,2	218,9	314,4
	$x < 0$	- 4707,7	- 75,6	- 316,1	- 416,1
Ausschnitt 1 A	$x > 0$	4655,6	63,5	41,8	62,6
	$x < 0$	- 4784,4	- 81,1	- 89,1	- 115,9

Tabelle 8.2 Strombilanzen für die ursprüngliche Variante 1 im Gesamtgebiet und die Berechnung im Ausschnitt 1 A

Im Vergleich zur anfänglichen Berechnung im Gesamtlösungsgebiet und damit groberem Gitternetz im Bereich des Kühlzylinders fällt die Strombilanz für die ausschnittsweise Berechnung des Kühlzylinders mit feinem Gitternetz besser aus. Der relative Fehler des Wirkstromes über die Kühlmantelschnittflächen bezogen auf den eingepprägten Strom sinkt von 6,3 % bei Rechnung im Gesamtgebiet auf 1,9 % bei Ausschnittsberechnung. Damit wird deutlich, daß eine feinere und vor allem gleichmäßigere Unterteilung des Gitternetzes im Kühlzylinder und dem ihn umgebenden Luftgebiet, eine bessere Rechengenauigkeit bewirkt. Demzufolge war die für die in Kapitel 6 vorgestellten Variantenrechnungen 1 bis 4 verwendete Diskretisierung für die Rechnung zu grob und zu ungleichmäßig.

Die Strombilanz über den Rinnenquerschnitt fällt für die Ausschnittsberechnung gegenüber der ursprünglichen Variante schlechter aus, was auf die Approximation von Zwischenwerten für Vektorpotential und skalares Potential auf der Rinnenaußenfläche zurückzuführen ist.

Insgesamt sind die Unterschiede in der Verlustleistungsberechnung von P_{Km} zwischen grober und feiner Vernetzung so gering, daß die im Kapitel 6 ausgewiesenen Ergebnisse eine für die Dimensionierung des Rinnenofens ausreichende Aussagekraft haben.

Die Berechnung mit höherer Detailauflösung unter Festlegung eines Lösungsgebietausschnittes wurde am Beispiel der Wirbelstrom- und Verlustberechnung am Kühlzylinder der Rinnenofeninduktoreinheit erfolgreich angewendet. Dabei wurde die Methode 2 mit Untersuchung der Rückwirkung des Kühlmantels auf die Feldverteilung eingesetzt. Der Ausschnitt wurde speziell für den Kühlzylinder festgelegt.

Für die Wirbelstrom- und Verlustberechnung im geschlitzten Gehäuse kann prinzipiell in gleicher Art und Weise vorgegangen werden. Voraussetzung dabei ist, daß der Lösungsgebietsausschnitt speziell für das Gehäuse festgelegt wird, d.h. das vollständige Gehäuse enthält, und die Randbedingungen auf den Randflächen des Ausschnittes im Voraus berechnet wurden.

Die Detailauflösung im Lösungsgebietsausschnitt ist aber nicht auf die Berechnung parasitärer Ströme allein beschränkt. Auch der Strom und die in der Rinne umgesetzte Leistung könnten mit höherer Detailauflösung berechnet werden. Dann muß aber nach der Methode 1 vorgegangen werden, um den Lösungsgebietsausschnitt festzulegen, da die Rinne den Hauptteil des induzierten Stromes führt und somit die Feldverteilung im Lösungsgebiet sehr stark prägt.

9. Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die parasitären Wirbelstromverluste in den Konstruktionselementen von Induktions-Rinnenöfen durch ein numerisches Berechnungsverfahren in ihrer Größe richtig zu erfassen und auch deren räumliche Verteilung analysieren zu können. Diese Aufgabe war auch teilweiser Bestandteil des BMFT Forschungsprojektes „Verbesserung der Energieausnutzung in umweltfreundlichen Induktions-Rinnenöfen durch Optimierung der Schmelzenströmung“, das in Zusammenarbeit zwischen der Fa. ABB- Industrieofenbau Dortmund, dem Institut für Elektrowärme der Universität Hannover und dem Fachgebiet Elektrowärme der Technischen Universität Ilmenau von 1991 bis 1993 bearbeitet wurde. Während der Untersuchungen galt es unter anderem herauszufinden, wie der Wirkungsgrad von Rinnenöfen mit Einsatzgebiet Schmelzen von Nichteisenmetallen durch geeignete konstruktive Maßnahmen positiv beeinflusst werden kann. Unter diesen Rahmen fällt besonders die Reduzierung der Wirbelstromverluste in den Konstruktionselementen dieser Öfen.

Wie in Kapitel 2 erläutert, treten Wirbelströme funktionsbedingt insbesondere in Kühlzylinder und Gehäuse der Induktoreinheit beim Rinnenofen auf.

Zur numerischen Beschreibung der mit den Strömen verbundenen Wirbelstromverluste für die Induktoreinheit wurde ausgehend von den Maxwell-Gleichungen der Elektromagnetik das feldbeschreibende Differentialgleichungssystem im $A-\phi$ -Ansatz formuliert, siehe Kapitel 3. Mit dem Galerkin-Verfahren war es dann möglich, wie in Kapitel 4 dargelegt wird, dieses $A-\phi$ -Basis-differentialgleichungssystem für die dreidimensionale numerische Berechnung mit finiten Elementen aufzubereiten. Die Methode der finiten Elemente bietet hierbei insbesondere den Vorteil einer genauen Erfassung der Grundgeometrie und Hauptabmessungen unter Nutzung von Symmetrien im Feldgebiet. Die Genauigkeit wird dabei hauptsächlich von der Anzahl der Knoten je Volumeneinheit bestimmt. Eine Erfassung der Stromverteilung im Leiter bis über die Eindringtiefe hinab wird somit möglich.

Zur Vorbereitung von Variantenrechnungen einer Induktoreinheit für den Induktions-Rinnenofen zum Schmelzen von Kupfer wurden zunächst, wie in Kapitel 5 erläutert, numerische Voruntersuchungen notwendig. Durch die vorausgehenden Berechnungen war es unter anderem möglich, die Größe des Lösungsgebietes, d.h. den Abstand des Randes vom aktiven Feldgebiet, sowie auch die für die FEM-Rechnung der Wirbelströme nicht zu unterschreitende durchschnittliche Mindestknotendichte festzulegen.

Der Vergleich zwischen den am Rinnenofen meßtechnisch ermittelten Verlusten und den auf FEM-Basis berechneten Werten ergibt für den Rinnenofen hervorragende Übereinstimmung. Jedoch wurden hierbei die Wirbelstromverluste nur kalorimetrisch ermittelt. Während der FEM-Rinnenofenvariantenrechnungen wurden in den leitfähigen Gebieten auch die Stromflüsse über die Schnittflächen an den Symmetrieebenen im berechneten Lösungsgebiet als ein wichtiges Kriterium für die Rechengenauigkeit überprüft.

Als zusätzliches Beispiel für die Überprüfung der numerischen Vielfältigkeit des entwickelten FEM-Lösungsalgorithmus zur Wirbelstromberechnung wird ein einfaches dreidimensionales Kühlzylinder-Modell gewählt. Beim Modellversuch konnte die genauigkeitsmindernde kalorimetrische Messung umgangen werden. Das Verfahren der direkten Leistungsmessung wurde an-

gewendet. Alle Ergebnisse zum Kühlzylinder Modell sind in Kapitel 7 zusammengefaßt. Durch den Vergleich der Rechenergebnisse mit Messungen zeigt sich, daß das numerische Modell im Frequenzbereich von 50 Hz beim Rinnenofen bis zu 8 kHz beim Kühlzylinder- Modell universell und mit großer Genauigkeit einsetzbar ist.

Bei allen numerischen Untersuchungen hat sich gezeigt, der numerische Aufwand zur 3D FEM-Berechnung ist sehr groß. Kapitel 8 enthält daher Maßnahmen zur Verringerung des numerischen Aufwandes im Hinblick auf die numerische Beherrschbarkeit der Berechnungen mit Pentium-PC-Technologie. Untersucht wurde hierzu die ausschnittsweise dreidimensionale Feld- und Verlustberechnung für den Kühlzylinder . Dazu wurde im Ausschnitt nur der Kühlzylinder selbst und ein begrenztes Gebiet umgebende Luft berechnet. Diese Vorgehensweise bildet einen wesentlichen Ausgangspunkt für die Beherrschbarkeit komplizierter Anordnungen bei begrenzter Knoten- und Elementanzahl finiter Elemente. Indirekt kann mit der Methode zur ausschnittweisen Berechnung durch die gegenüber dem ursprünglichen Gesamtgebiet nicht erhöhte Element- und Knotenzahl die Anzahl der Unbekannten im Gleichungssystem begrenzt werden.

Die vorliegende Arbeit leistet damit insgesamt einen wesentlichen Beitrag auf dem Weg, dem Ofenkonstrukteur von Induktions- Rinnenöfen ein wirksames Hilfsmittel für den computergestützten Rinnenofenentwurf und die Ofenkonstruktion in die Hand zu geben.

Zugleich soll sie aber auch vor allem als Anregung verstanden werden weitere Maßnahmen zu finden, um verstärkt komplizierte dreidimensionale Anordnungen einer Berechnung zugänglich zu machen.

10. Literatur

- [ABB93] Nacke, B.:
Verbessertes Betriebsverhalten und erhöhte Wirkungsgrade bei Induktionsrinnenöfen. ABB Technik Nr. 6 / 7, 1993, S. 37 – 44
- [AKI90] Akihisa Kameari
Calculation of Transient Eddy Currents using EDGE-Elements.
IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No.2, March 1990, p. 466 – 469
- [AND89] Andree, W. .; Lüdtke U.
„PROMETHEUS“- ein universelles Programmsystem zur Berechnung technischer Felder
34. Internationales wissenschaftliches Kolloquium (IWK), Technische Hochschule Ilmenau 1989
- [ANSY] ANSYS
Theory Reference. 000855. Eight Edition. SAS IP. Inc.©
- [BAA94] Baake, E. ; Mühlbauer, A. ; Westphal, E.:
Stand der Technik und Entwicklungstrends beim induktiven Schmelzen.
Elektrowärme International 52 (1994) B2 , S. B60 – B70
- [BIRO89] Biro, O.; Preis, K.:
On the Use of Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents.
IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No.4, July 1989, p. 3145 - 3159
- [BIRO94] Biro, O.; Preis, K.:
Berechnung dreidimensionaler, nichtlinearer Wirbelströme.
Elektrotechnik u. Informationstechnik (e&i) 111. Jg. (1994), H. 3, S. 97 – 101
- [BMFT92] Abschlußbericht BMFT- Forschungsvorhaben Verbundprojekt:
Verbesserung der Energieausnutzung in umweltfreundlichen Induktions-Rinnenöfen durch Optimierung der Schmelzenströmung. ABB Industrie- und Automation AG, Industrieofenbau Dortmund; Universität Hannover, Institut für Elektrowärme; TU Ilmenau, FG Elektrowärme; 1992
- [BREB90] Brebbia,C.A. ; Chaudouet, M.:
Boundary Elements in Mechanical and Electrical Engineering.
1. Engineering. Mathematics. Boundary element methods.
Southampton: Computational Mechanics, 1990
Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1990
- [BRON60] Bronstein, I.N. ; Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik
Leipzig, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1960
- [FRICK90] Fricke, R.:
Zur Beurteilung von Strömungen in der Schmelze von Induktions-Rinnenöfen.
Universität Hannover, Dissertation, 1990

- [KERS78] Kershaw, D.S.:
The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations.
Journal of Computational Physics 26, (1978), p. 43-65
- [KOST94] Kost, A.:
Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder.
Berlin; Heidelberg, New York; London; Paris; Tokio; Hong Kong; Barcelona;
Budapest: Springer-Verlag, 1994
- [LEHN94] Lehner, G.:
Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker.
Berlin; Heidelberg, New-York; London; Paris; Tokio, Hong Kong:
Springer-Verlag, 1994, 2. Aufl.
- [LÜDT90] Lüdtke, U.:
Zur numerischen Berechnung dreidimensionaler elektromagnetischer Felder.
Ilmenau: 1990, Techn. Hochschule, Diss. A
- [MEIJ77] Meijerink, J.A.; van der Vorst, H.A.:
An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix . Mathematics of Computation, Vol.31, No.137,
January 1977, p.148-162
- [MOH93] Mohring, J.- U.
3D-Simulation der induktiven Banderwärmung im magnetischen Quersfeld
TU Ilmenau, Diplomarbeit, 1993
- [MÜHL92] Mühlbauer, A. (Hrsg.):
Industrielle Elektrowärmetechnik. Essen: Vulkan-Verl. 1992
- [NACK91] Nacke, B.; Walther, A. ; Eggers, A. u. Lüdtke, U.:
Optimierung des Betriebsverhaltens von Rinneninduktoren.
Elektrowärme International 49 (1991) B4 , S. B176 - 187
- [NACK92] Nacke, B.:
Entwicklungstendenzen bei Induktionsrinnenöfen.
Elektrowärme International 50 (1992) B2, S. B236 – B245
- [REN88] Renhart, W.; Stögner, H.; Preis, K.:
Calculation of 3D Eddy Current Problems by Finite Element Method Using either an Electric or Magnetic Vector Potential.
IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No.4, July 1988, p. 122 – 125
- [RUD89] Rudolph, M.; Schäfer, H.:
Elektrothermische Verfahren: Grundlagen, Technologien, Anwendungen.
Berlin; Heidelberg, New-York; London; Paris; Tokio: Springer-Verlag 1989
- [RWE91] Herausgeber RWE AG: RWE- Verfahrensinformation:
Induktives Erwärmung: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen.
Essen: RWE AG, Abt. Anwendungstechnik, 1991, 4. Aufl.

- [SCHW91] Schwarz, H. R.:
Methode der finiten Elemente: eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis.- Stuttgart: Teubner, 1991
- [SIM89] Simonyi, K.:
Theoretische Elektrotechnik.
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1989
- [STRA93] Strassacker, G.; Strassacker, P.:
Analytische und numerische Methoden der Feldberechnung.
Stuttgart: B.G. Teubner, 1993
- [WALT92] Walther, A.:
Computersimulation der Schmelzenströmung in Induktions-Rinnenöfen.
Universität Hannover, Dissertation, 1992
- [WOHL95] Wohlfahrt, D.:
3D-Berechnung von Mikrowellenfeldern in Resonatorräumen zur Temperaturfeldberechnung
Ilmenau, Technische Universität, Dissertation, 1995
- [WSEW92] Nacke, B.:
Verbesserung des Wirkungsgrades von Rinneninduktoren.
WORKSHOP „Automatisierung in der Elektrowärme“ TU Ilmenau,
FG Elektrowärme, 24. Okt. 1992
- [WUN89] Wunsch, G., Schulz H.-G.:
Elektromagnetische Felder. Berlin: VEB Verlag Technik, 1989
- [ZIEN84] Zienkiewicz, O.C. (dt. Übers.):
Methode der finiten Elemente. München: Carl Hanser Verlag, 1984;
erschienen im VEB Fachbuchverlag Leipzig 1984

Nachfolgend werden die in den Gleichungen (4.36) bis (4.39) noch enthaltenen Oberflächenintegrale

$$b_{\xi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(N_j^e \vec{e}_{\xi} \times \text{rot } \underline{\tilde{A}} \right) \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.1})$$

$$b_{\eta j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(N_j^e \vec{e}_{\eta} \times \text{rot } \underline{\tilde{A}} \right) \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.2})$$

$$b_{\psi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(N_j^e \vec{e}_{\psi} \times \text{rot } \underline{\tilde{A}} \right) \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.3})$$

$$c_{\varphi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ j \omega \kappa_e \left(\underline{\tilde{A}} + \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} \right) N_j^e \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.4})$$

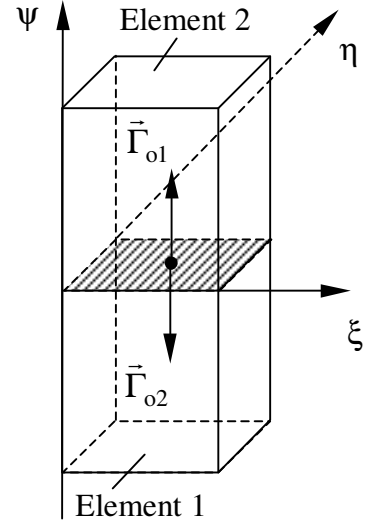


Bild A1.1 Grenzfläche zweier finiter Elemente

näher betrachtet. Für die Elementintegration werden die finiten Elemente in Einheits-elemente in ein ξ, η, ψ -Koordinatensystem transformiert [ZIEN84], [LÜDT90]. Die Integrale (A1.1) bis (A1.4) gelten für jedes einzelne finite Element. Dabei muß zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Entweder die Oberfläche gehört zur äußeren Berandung des Lösungsgebietes, oder sie ist die gemeinsame Grenzfläche zwischen zwei finiten Elementen, wie in Bild A1.1 veranschaulicht wird.

Für die Oberflächenintegrale (A1.1) bis (A1.4) ergeben sich mit einem in ψ -Richtung weisenden Einheitsvektor, siehe Bild A1.1, und nach Auflösung der Rotation folgende Gleichungen (A1.5) bis (A1.8):

$$b_{\xi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(N_j^e \vec{e}_{\xi} \times \text{rot } \underline{\tilde{A}} \right) \right\} \cdot \vec{e}_{\psi} d\Gamma_{oe} = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} N_j^e \left(\frac{\partial \tilde{A}_{\xi}}{\partial \psi} - \frac{\partial \tilde{A}_{\psi}}{\partial \xi} \right) \right\} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.5})$$

$$b_{\eta j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(N_j^e \vec{e}_{\eta} \times \text{rot } \underline{\tilde{A}} \right) \right\} \cdot \vec{e}_{\psi} d\Gamma_{oe} = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} N_j^e \left(\frac{\partial \tilde{A}_{\eta}}{\partial \psi} - \frac{\partial \tilde{A}_{\psi}}{\partial \eta} \right) \right\} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.6})$$

$$b_{\psi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(N_j^e \vec{e}_{\psi} \times \text{rot } \underline{\tilde{A}} \right) \right\} \cdot \vec{e}_{\psi} d\Gamma_{oe} = 0 \quad (\text{A1.7})$$

$$c_{\varphi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ j \omega \kappa_e \left(\underline{\tilde{A}} + \text{grad } \underline{\tilde{\Phi}} \right) N_j^e \right\} \cdot \vec{e}_{\psi} d\Gamma_{oe} = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ j \omega \kappa_e \left(\tilde{A}_{\psi} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \psi} \right) N_j^e \right\} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.8})$$

Die in ξ - und η -Richtung weisenden Oberflächenintegrale werden analog behandelt, aber an dieser Stelle nicht explizit aufgeführt

Für die Komponenten der magnetischen Flußdichte folgt aus (A1.5) bis (A1.7):

$$b_{\xi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} N_j^e \left(\frac{\partial \tilde{A}_{\xi}}{\partial \psi} - \frac{\partial \tilde{A}_{\psi}}{\partial \xi} \right) \right\} d\Gamma_{oe} = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} N_j^e B_{\eta} \right\} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.9})$$

$$b_{\eta j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} N_j^e \left(\frac{\partial \tilde{A}_\eta}{\partial \psi} - \frac{\partial \tilde{A}_\psi}{\partial \eta} \right) \right\} d\Gamma_{oe} = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} N_j^e (-B_\xi) \right\} d\Gamma_{oe} \quad (A1.10)$$

Die Oberflächenintegrale (A1.5) bis (A1.7) bzw. (A1.9) und (A1.10) werden bei der Behandlung von Randbedingungen erster Art für alle Komponenten ($\vec{A} = 0$), ($\varphi = \text{const.}$) und der Forderung $\vec{B} = 0$ zu Null. In diesem Fall werden bei der Berücksichtigung der Randbedingungen genau diejenigen Zeilen und Spalten der Systemmatrix überschrieben in die die Integrale einen Beitrag geliefert hätten.

An Symmetrieflächen mit Tangentialkomponenten vom magnetischen Vektorpotential besitzt die magnetische Flußdichte keine Tangentialkomponenten. Somit werden die Oberflächenintegrale (A1.9) und (A1.10), die die Tangentialkomponenten der Flußdichte enthalten, zu Null.

Das Verhalten der Oberflächenintegrale (A1.1) bis (A1.4) an einer gemeinsamen Grenzfläche wird am Beispiel zweier Hexaederelemente erläutert, siehe Bild A1.1. Für jedes Element existiert ein Oberflächenintegral mit entgegengesetzt gerichtetem Oberflächenvektor:

$$d\vec{\Gamma}_{o1} = -d\vec{\Gamma}_{o2} \quad \text{bzw.} \quad d\Gamma_{o1} \cdot \vec{e}_\psi = -d\Gamma_{o2} \cdot \vec{e}_\psi. \quad (A1.11)$$

D.h. auf der Grenzfläche sind folgende Integrale zu untersuchen:

$$\oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ \frac{1}{\mu_1} (N_j^e \vec{e}_\xi \times \text{rot } \tilde{\underline{A}}_1) \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} = \oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ \frac{1}{\mu_2} (N_j^e \vec{e}_\xi \times \text{rot } \tilde{\underline{A}}_2) \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} \quad (A1.12)$$

$$\oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ \frac{1}{\mu_1} (N_j^e \vec{e}_\eta \times \text{rot } \tilde{\underline{A}}_1) \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} = \oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ \frac{1}{\mu_2} (N_j^e \vec{e}_\eta \times \text{rot } \tilde{\underline{A}}_2) \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} \quad (A1.13)$$

$$\oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ \frac{1}{\mu_1} (N_j^e \vec{e}_\psi \times \text{rot } \tilde{\underline{A}}_1) \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} = \oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ \frac{1}{\mu_2} (N_j^e \vec{e}_\psi \times \text{rot } \tilde{\underline{A}}_2) \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} \quad (A1.14)$$

$$\oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ j \omega \kappa_1 (\tilde{\underline{A}}_1 + \text{grad } \tilde{\varphi}_1) N_j^e \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} = \oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ j \omega \kappa_2 (\tilde{\underline{A}}_2 + \text{grad } \tilde{\varphi}_2) N_j^e \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} \quad (A1.15)$$

Die Lösungsansätze für \vec{A} und φ gehen sowie die globale Gewichtsfunktion N_j gehen an der gemeinsamen Grenzfläche von Element zu Element stetig über.

Nach Auswertung der Oberflächenintegrale (A1.12) bis (A1.14) unter Berücksichtigung der magnetischen Flußdichte ergeben sich die Beziehungen:

$$\oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ N_j^e \vec{e}_\xi \times \frac{\tilde{\underline{B}}_1}{\mu_1} \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} = \oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ N_j^e \vec{e}_\xi \times \frac{\tilde{\underline{B}}_2}{\mu_2} \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} \quad (A1.16)$$

$$\oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ N_j^e \vec{e}_\eta \times \frac{\tilde{\underline{B}}_1}{\mu_1} \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} = \oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ N_j^e \vec{e}_\eta \times \frac{\tilde{\underline{B}}_2}{\mu_2} \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} \quad (A1.17)$$

$$\oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ N_j^e \vec{e}_\psi \times \frac{\tilde{\underline{B}}_1}{\mu_1} \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} = \oint_{\Gamma_{o1}} \left\{ N_j^e \vec{e}_\psi \times \frac{\tilde{\underline{B}}_2}{\mu_2} \right\} \cdot \vec{e}_\psi d\Gamma_{o1} \quad (A1.18)$$

Nach Umformung in Komponentenschreibweise, wobei nur die Komponenten in ψ -Richtung für das gewählte Beispiel übrigbleiben, kann man die drei Gleichungen (A16.1) bis (A18.1) zu einer Gleichung zusammenfassen:

$$\oint_{\Gamma_{01}} \left\{ \frac{1}{\mu_1} N_j^e (\tilde{B}_{\eta 1} - \tilde{B}_{\xi 1}) \right\} d\Gamma_{01} = \oint_{\Gamma_{01}} \left\{ \frac{1}{\mu_2} N_j^e (\tilde{B}_{\eta 2} - \tilde{B}_{\xi 2}) \right\} d\Gamma_{01} \quad (\text{A1.19})$$

Gleichung (A1.19) beinhaltet damit die Forderung eines stetigen Übergangs der Tangentialkomponente des magnetischen Feldes.

$$\frac{\tilde{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{\tilde{B}_{t2}}{\mu_2} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{H}_{t1} = \tilde{H}_{t2} \quad (\text{A1.20})$$

Die in den Gleichungen (4.36) bis (4.38) enthaltenen Oberflächenintegrale mit Divergenzanteil

$$d_{\xi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_{\xi} \cdot \text{div } \tilde{\underline{A}}) \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.21})$$

$$d_{\eta j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_{\eta} \cdot \text{div } \tilde{\underline{A}}) \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.22})$$

$$d_{\psi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_{\psi} \cdot \text{div } \tilde{\underline{A}}) \right\} \cdot \vec{n} d\Gamma_{oe} \quad (\text{A1.23})$$

können wenn der Normalenvektor in ψ -Richtung zeigt umgewandelt werden in

$$d_{\xi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_{\xi} \cdot \text{div } \tilde{\underline{A}}) \right\} \cdot \vec{e}_{\psi} d\Gamma_{oe} = 0 \quad (\text{A1.24})$$

$$d_{\eta j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_{\eta} \cdot \text{div } \tilde{\underline{A}}) \right\} \cdot \vec{e}_{\psi} d\Gamma_{oe} = 0 \quad (\text{A1.25})$$

$$d_{\psi j}^e = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} (N_j^e \vec{e}_{\psi} \cdot \text{div } \tilde{\underline{A}}) \right\} \cdot \vec{e}_{\psi} d\Gamma_{oe} = - \oint_{\Gamma_{oe}} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(N_j^e \frac{\partial \tilde{A}_{\psi}}{\partial \psi} \right) \right\} d\Gamma_{oe} . \quad (\text{A1.26})$$

Die in Gleichung (A1.26) noch enthaltene Ableitung von \tilde{A}_{ψ} in ψ -Richtung wird auf allen Außenrändern Null gesetzt. An der Grenzfläche zwischen zwei Elementen heben sich die beiden entgegengesetzt gerichteten Anteile der Ableitungen von \tilde{A}_{ψ} in ψ -Richtung gegenseitig auf.

Die Elemente der Matrix [U] für das komplexe algebraische Gleichungssystem in Abschnitt 4.2.3 sind Matrizen der Form:

$$U_{ji} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{11} & u_{12} & u_{13} & \underline{u}_{14} \\ u_{21} & \underline{u}_{22} & u_{23} & \underline{u}_{24} \\ u_{31} & u_{32} & \underline{u}_{33} & \underline{u}_{34} \\ \underline{u}_{41} & \underline{u}_{42} & \underline{u}_{43} & \underline{u}_{44} \end{bmatrix}_{ji}, \quad (4.54)$$

Komponenten der Matrix U_{ji} :

$$\underline{u}_{11} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.1)$$

$$\underline{u}_{22} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.2)$$

$$\underline{u}_{33} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) + j\omega \kappa_e N_j^e N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.3)$$

$$\underline{u}_{44} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j\omega \kappa_e \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.4)$$

$$u_{12} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} - \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.5)$$

$$u_{13} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} - \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.6)$$

$$u_{21} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.7)$$

$$u_{23} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} - \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right\} d\Omega_e \right] \quad (A2.8)$$

$$u_{31} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.9})$$

$$u_{32} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} - \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.10})$$

$$\underline{u}_{14} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.11})$$

$$\underline{u}_{24} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.12})$$

$$\underline{u}_{34} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.13})$$

$$\underline{u}_{41} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.14})$$

$$\underline{u}_{42} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.15})$$

$$\underline{u}_{43} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left\{ j \omega \kappa_e \frac{\partial N_j^e}{\partial z} N_i^e \right\} d\Omega_e \right] \quad (\text{A2.16})$$

1. Varianten mit Gitternetz-Verfeinerung $\mu_r = 1000$ $s = 200$ mm

VAR	anze	anzk	ΔEl_x	ΔEl_z	ΔEl_φ	anzeAkt	ρEL_{Akt} in EL/cm ³	ρEL_{Ges} in EL/cm ³
V1	13 310	14 835	10	11	20	11 110	0,36	0,11
V3	53 200	57 024	15	17	32	45 040	1,46	0,44
V4	105 600	111 600	20	22	40	88 000	2,85	0,87
V5	128 075	134 832	21	24	46	104 890	3,40	1,06
V6	241 920	251 845	24	26	64	201 984	6,55	1,99

Tabelle A3.1 Elementdichte ρEL in Abhängigkeit von der Vernetzungsfeinheit

VAR	anze	P_{Rin} in kW	P_{Km} in kW	P_{Geh} in kW	P_{Ges} in kW	P_{KL} in kW
V1	13 310	91,662	3,444	1,795	96,901	93,271
V3	53 200	99,313	2,364	1,805	103,482	99,629
V4	105 600	102,125	2,090	1,811	106,026	101,828
V5	128 075	103,296	2,256	1,826	107,378	102,587
V6	241 920	104,929	2,256	1,828	109,013	104,032

Tabelle A3.2 Berechnete Wirkleistungen in Abhängigkeit von der Vernetzungsfeinheit

anze	Q_{Ind} in kVar	Q_{Rin} in kVar	Q_{Luft} in kVar	Q_{ML} in kVar	Q_{Km} in kVar	Q_{Geh} in kVar	Q_{Ges} in kVar	Q_{KL} in kVar
13 310	2,395	10,480	85,453	3,041	7,325	2,320	111,014	120,785
53 200	2,529	12,171	86,960	3,544	7,636	2,374	115,214	124,106
105 600	2,574	12,601	87,403	3,721	7,741	2,390	116,430	123,822
128 075	2,449	12,743	87,772	3,818	7,809	2,403	116,994	123,168
241 920	2,443	12,992	87,827	3,915	7,849	2,410	117,436	122,957

Tabelle A3.3 Berechnete Blindleistungen in Abhängigkeit von der Vernetzungsfeinheit

Ind = Induktor
 Rin = Rinne
 ML = Magnetjoch
 Km = Kühlmantel
 Geh = Gehäuse
 Ges = Gesamt
 KL = Klemmen

anze = Anzahl Elemente
 anzK = Anzahl Knoten
 Akt = Aktives Feldgebiet
 ρEL = Elementdichte

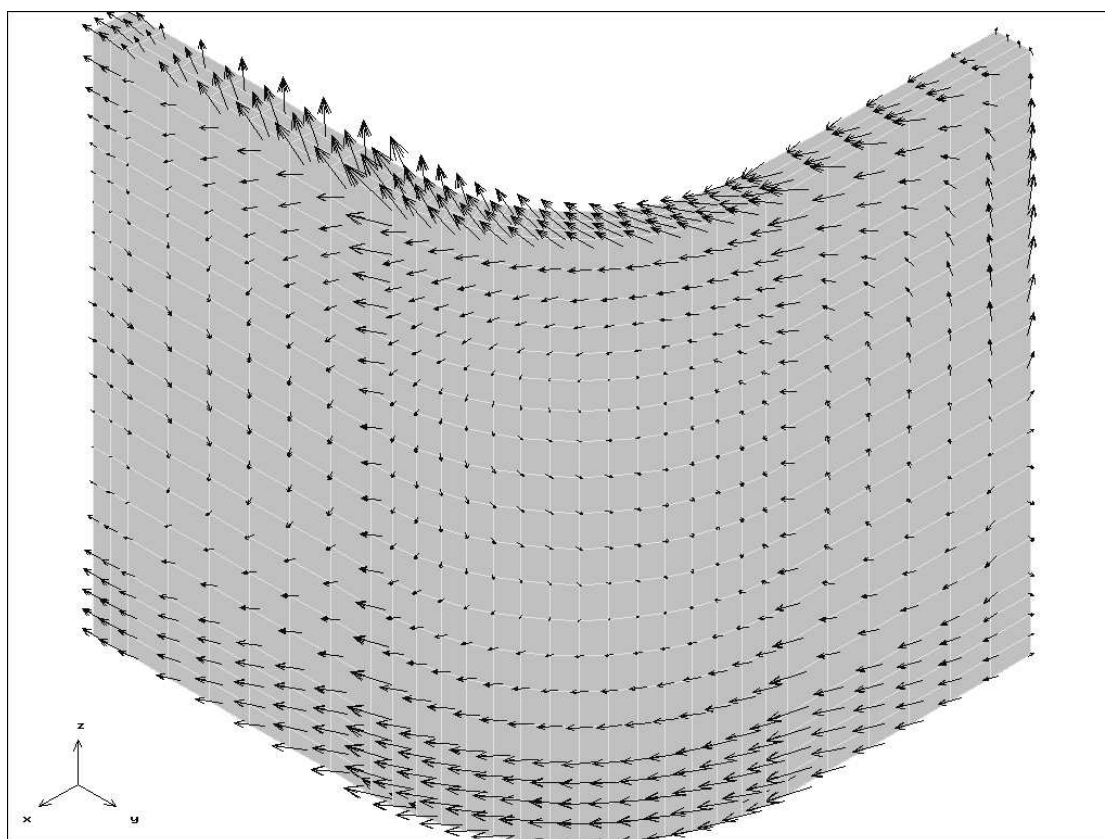


Bild A3.1 Realteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, 53200 Elemente
Variante V3

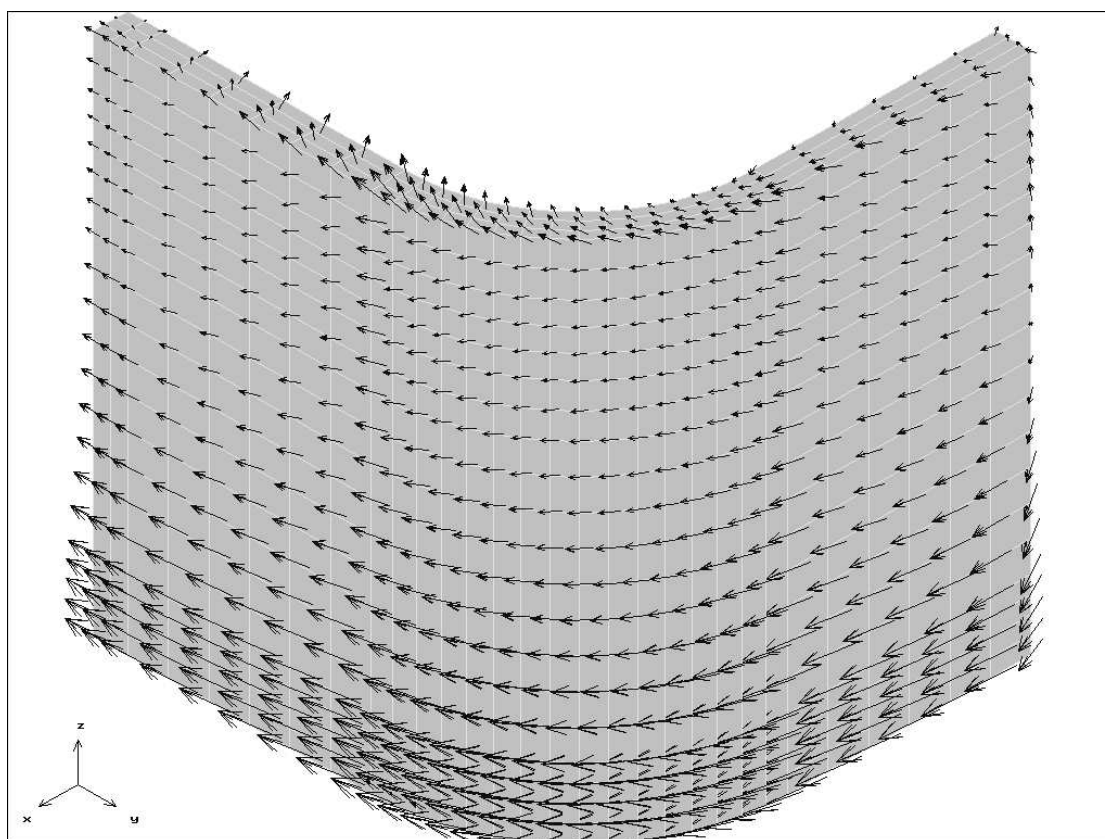


Bild A3.2 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, 53200 Elemente
Variante V3

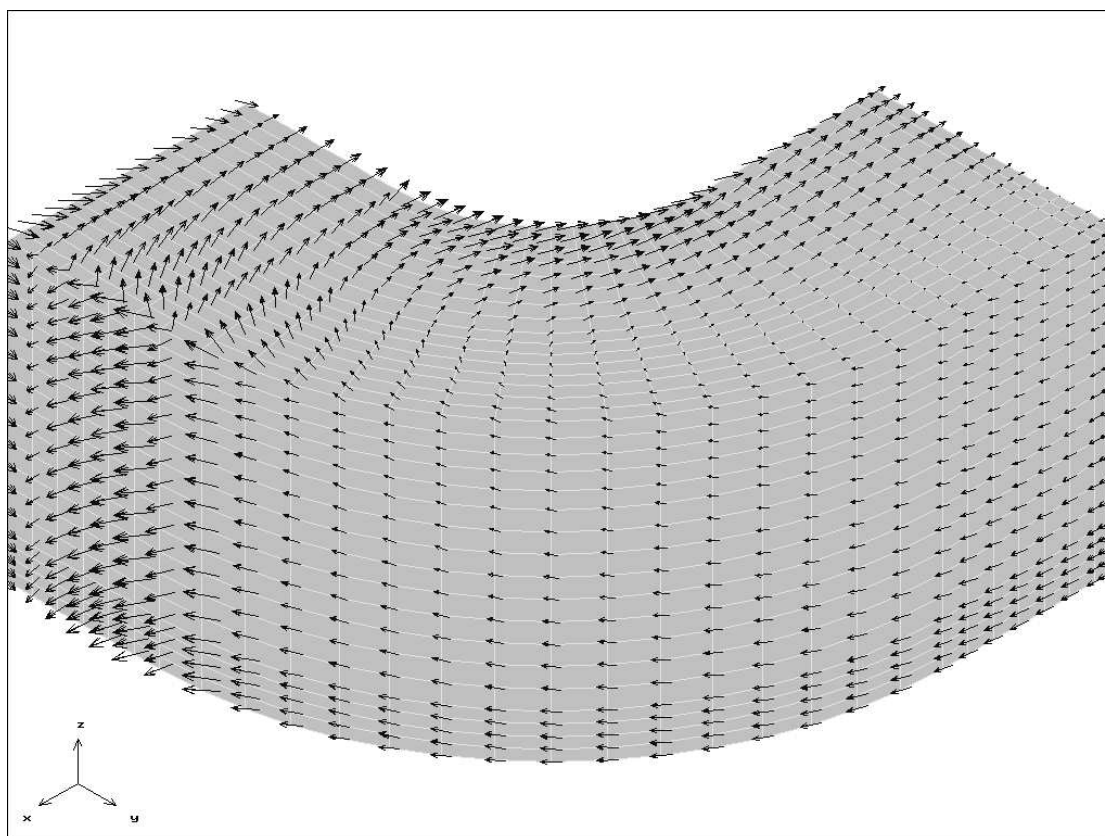


Bild A3.3 Realteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche, 53200 Elemente
Variante V3

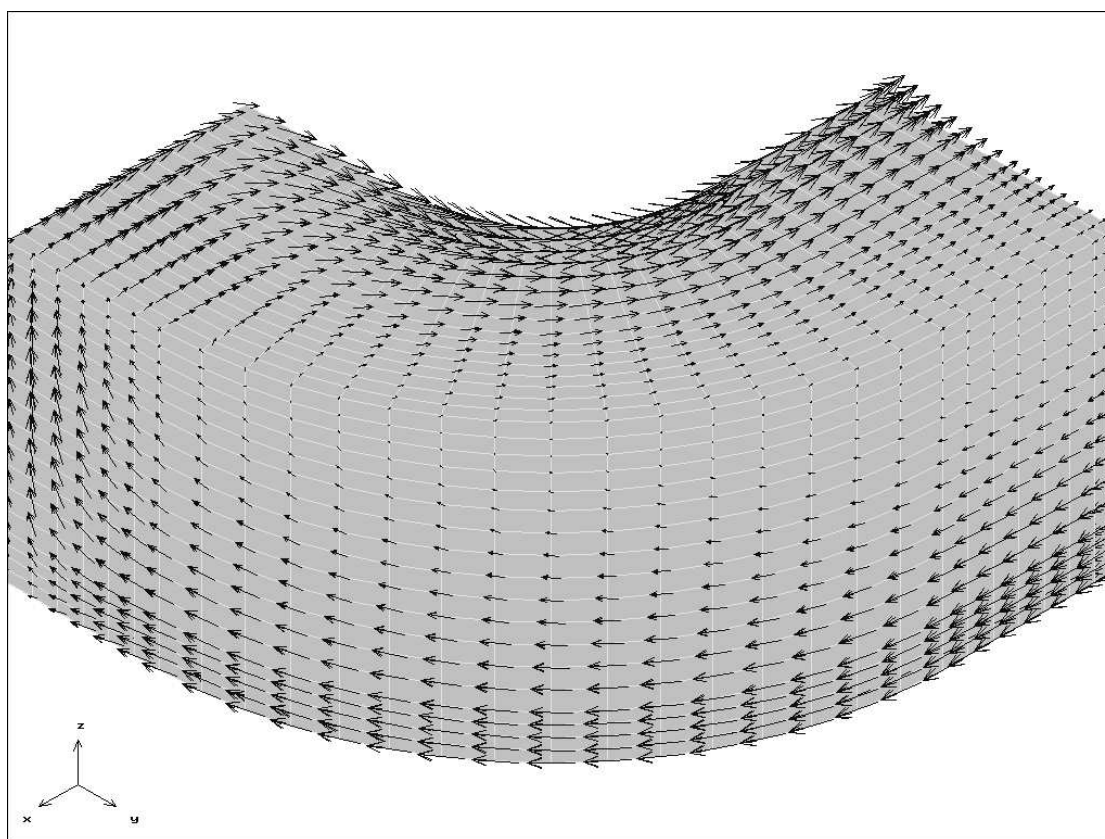


Bild A3.4 Imaginärteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche, 53200 Elemente
Variante V3

2. Varianten mit Verschiebung des äußeren Randes

a) Randbedingung $\vec{A} = 0$

VAR	s in mm	s _n
S ₁	95,238	0,2646
S ₂	200,000	0,5555
S ₃	342,857	0,9524
S ₄	523,809	1,4550
S ₅	742,857	2,0635
S ₆	1000,00	2,7777

Aktive Länge: L_{akt} = 360 mm

$$s_n = \frac{s}{L_{akt}}$$

Tabelle A3.4 Zusammenhang von Abstand s und normiertem Abstand s_n

VAR	s in mm	P _{Rin} in kW	P _{Km} in kW	P _{Geh} in kW	P _{Ges} in kW	P _{KL} in kW
S ₁	95,238	90,540	2,394	1,750	94,684	91,233
S ₂	200,000	99,313	2,364	1,805	103,482	99,629
S ₃	342,857	102,294	2,366	1,822	106,482	102,499
S ₄	523,809	102,884	2,367	1,825	107,076	103,084
S ₅	742,857	102,997	2,3675	1,8257	107,190	103,182
S ₆	1000,00	103,021	2,3675	1,8258	107,214	103,200

Tabelle A3.5 Berechnete Wirkleistungen in Abhängigkeit vom Randabstand

s in mm	Q _{Ind} in kVar	Q _{Rin} in kVar	Q _{Luft} in kVar	Q _{ML} in kVar	Q _{Km} in kVar	Q _{Geh} in kVar	Q _{Ges} in kVar	Q _{KL} in kVar
95,238	2,528	11,197	86,768	3,235	7,426	2,397	113,551	126,020
200,000	2,529	12,171	86,960	3,544	7,636	2,374	115,214	124,106
342,857	2,529	12,499	86,953	3,698	7,705	2,381	115,765	123,117
523,809	2,530	12,565	86,944	3,726	7,719	2,383	115,867	122,892
742,857	2,530	12,577	86,944	3,727	7,722	2,383	115,883	122,834
1000,00	2,530	12,580	86,945	3,726	7,722	2,383	115,886	122,820

Tabelle A3.6 Berechnete Blindleistungen in Abhängigkeit vom Randabstand

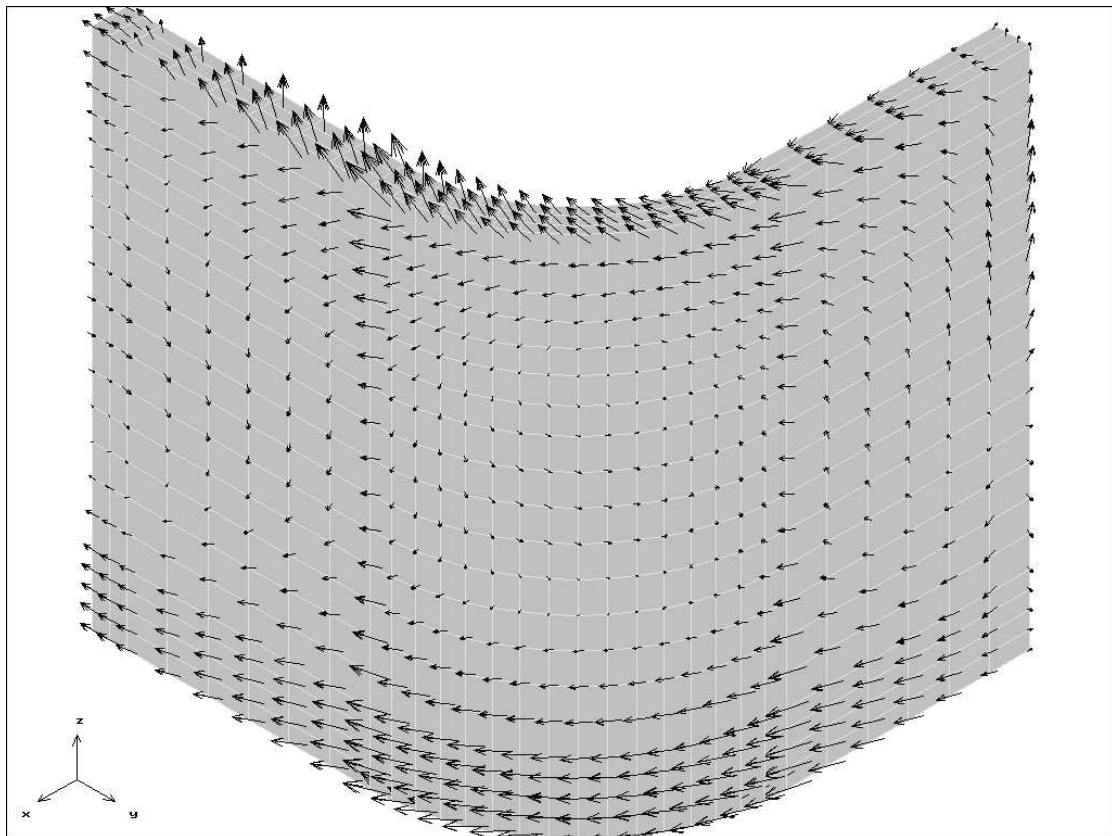


Bild A3.5 Realteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_4

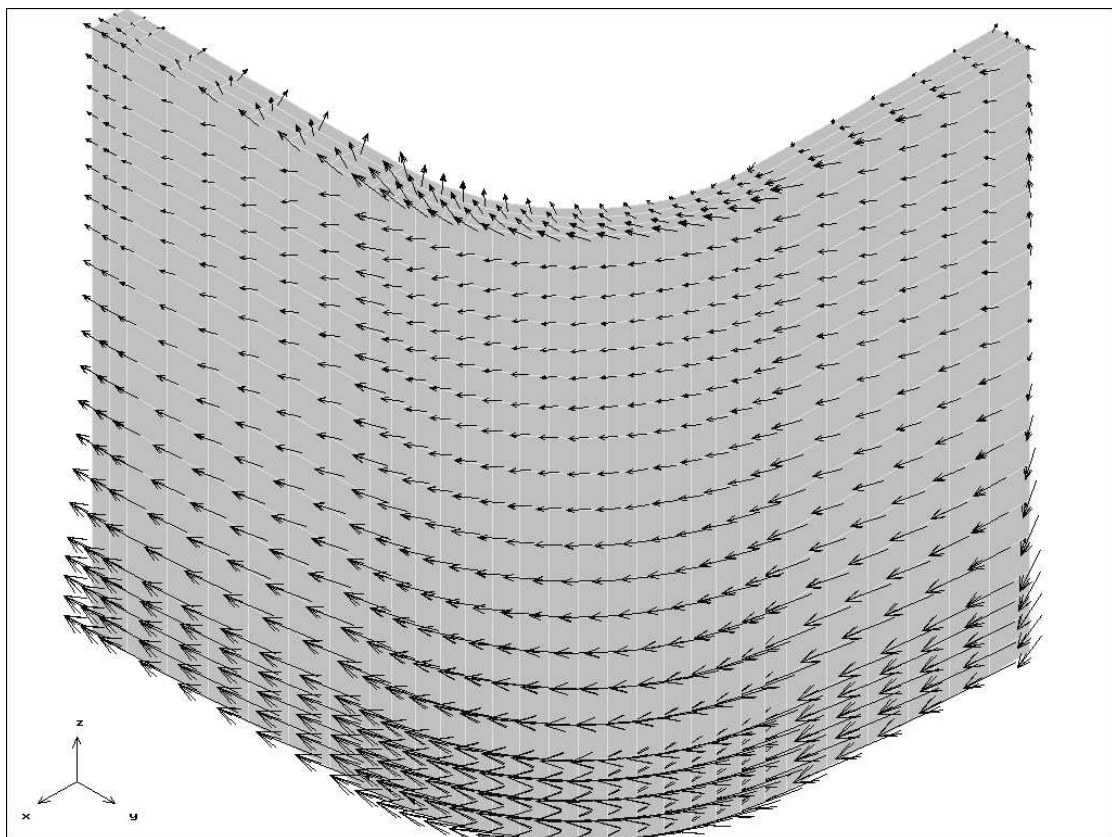


Bild A3.6 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_4

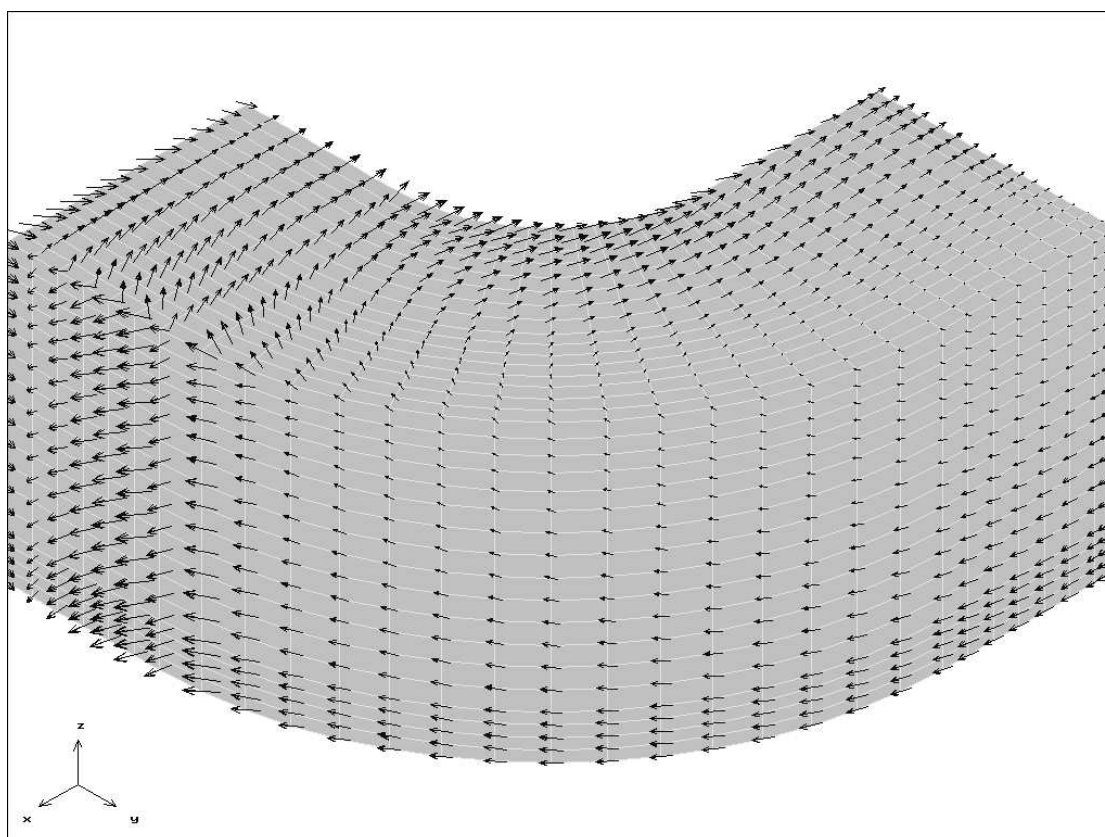


Bild A3.7 Realteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_4

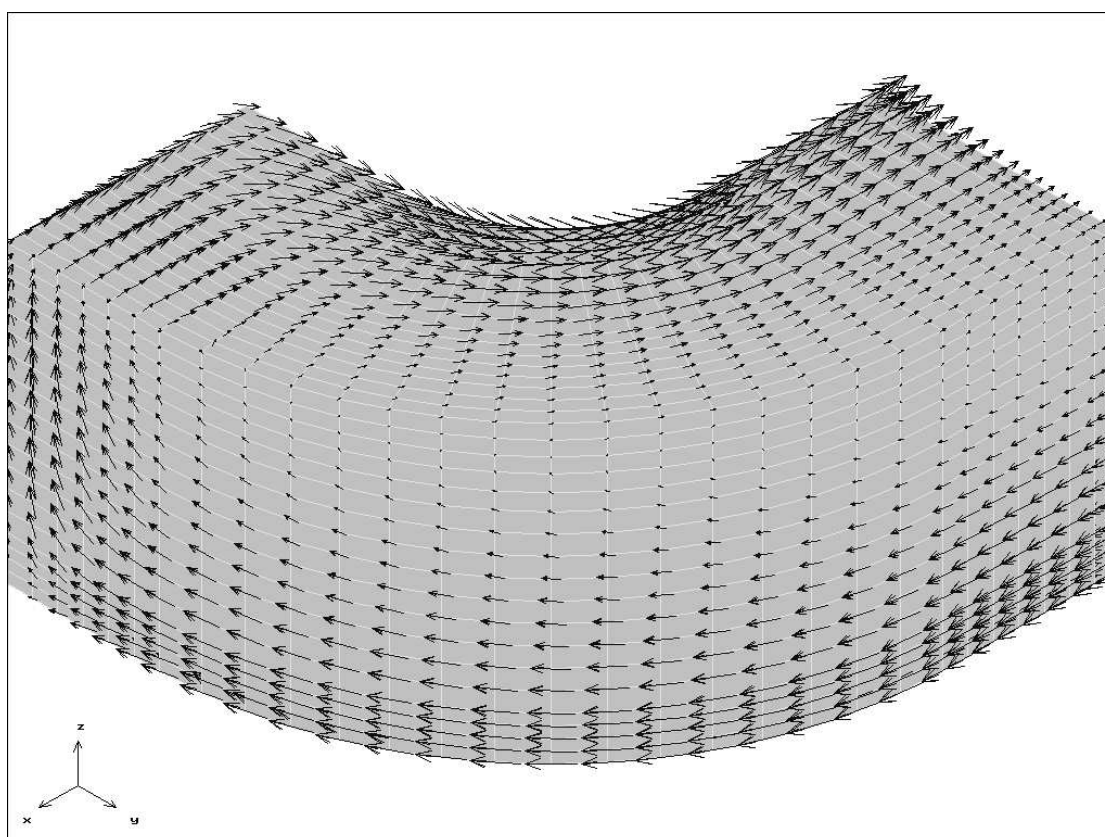


Bild A3.8 Imaginärteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_4

2. Varianten mit Verschiebung des äußeren Randes

b) Randbedingung $\bar{A}_n = 0$

VAR	s in mm	s _n
S _{1n}	95,238	0,2645
S _{2n}	200,000	0,5555
S _{3n}	342,857	0,9524
S _{4n}	523,809	1,4550
S _{5n}	742,857	2,0635
S _{6n}	1000,00	2,7777

Aktive Länge: Lakt = 360 mm

$$s_n = \frac{s}{L_{akt}}$$

Tabelle A3.7 Zusammenhang von Abstand s und normiertem Abstand s_n

VAR	s in mm	PRin in kW	PKm in kW	PGeh in kW	PGes in kW	PKL in kW
S _{1n}	95,238	103,408	2,364	1,838	107,610	103,543
S _{2n}	200,000	103,113	2,366	1,828	107,307	103,286
S _{3n}	342,857	103,049	2,367	1,826	107,242	103,236
S _{4n}	523,809	103,035	2,367	1,826	107,228	103,225
S _{5n}	742,857	103,031	2,367	1,826	107,224	103,212
S _{7n}	1000,00	103,030	2,367	1,826	107,223	103,213

Tabelle A3.8 Berechnete Wirkleistungen in Abhängigkeit vom Randabstand

s in mm	QInd in kVar	QRin in kVar	QLuft in kVar	QML in kVar	QKm in kVar	QGeh in kVar	QGes in kVar	QKL in kVar
95,238	2,530	12,628	87,285	3,588	7,736	2,379	116,146	122,643
200,000	2,530	12,591	87,039	3,671	7,726	2,379	115,936	122,728
342,857	2,530	12,583	86,972	3,701	7,723	2,380	115,890	122,774
523,809	2,530	12,581	86,956	3,713	7,723	2,381	115,884	122,795
742,857	2,530	12,581	86,951	3,718	7,723	2,382	115,884	122,798
1000,00	2,530	12,581	86,949	3,720	7,723	2,382	115,884	122,80

Tabelle A3.9 Berechnete Blindleistungen in Abhängigkeit vom Randabstand

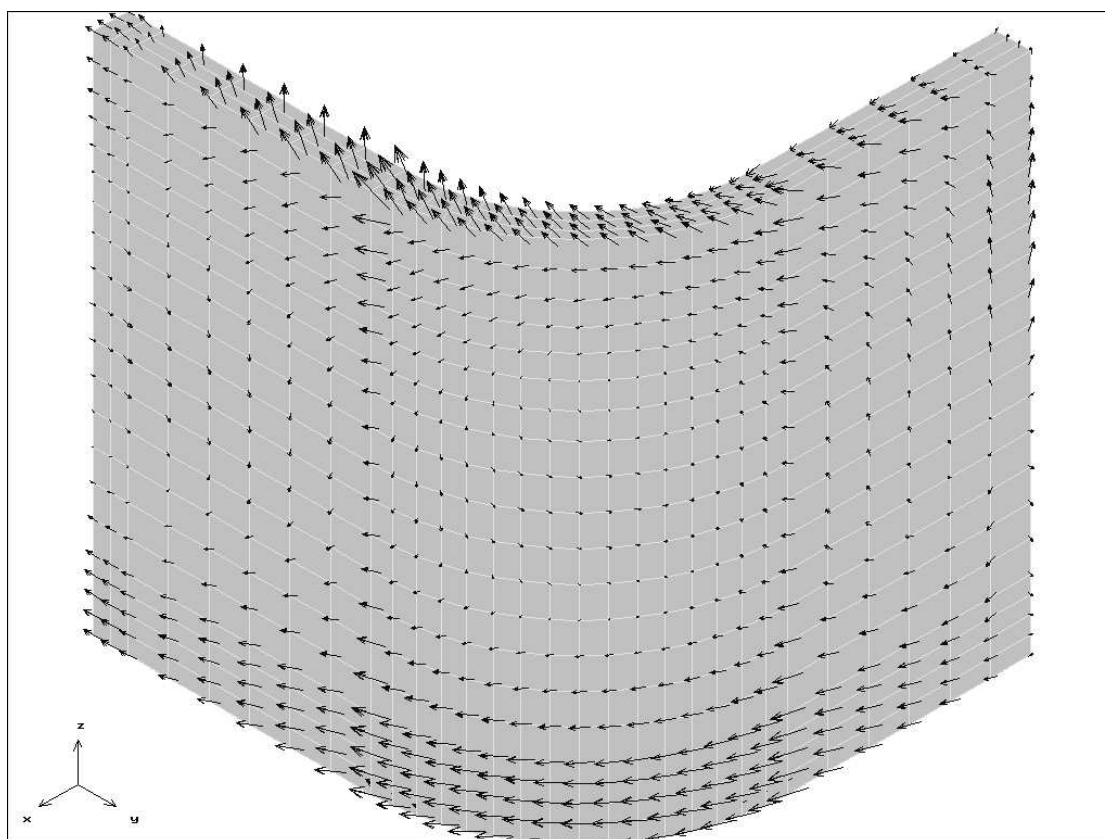


Bild A3.9 Realteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_{4n}

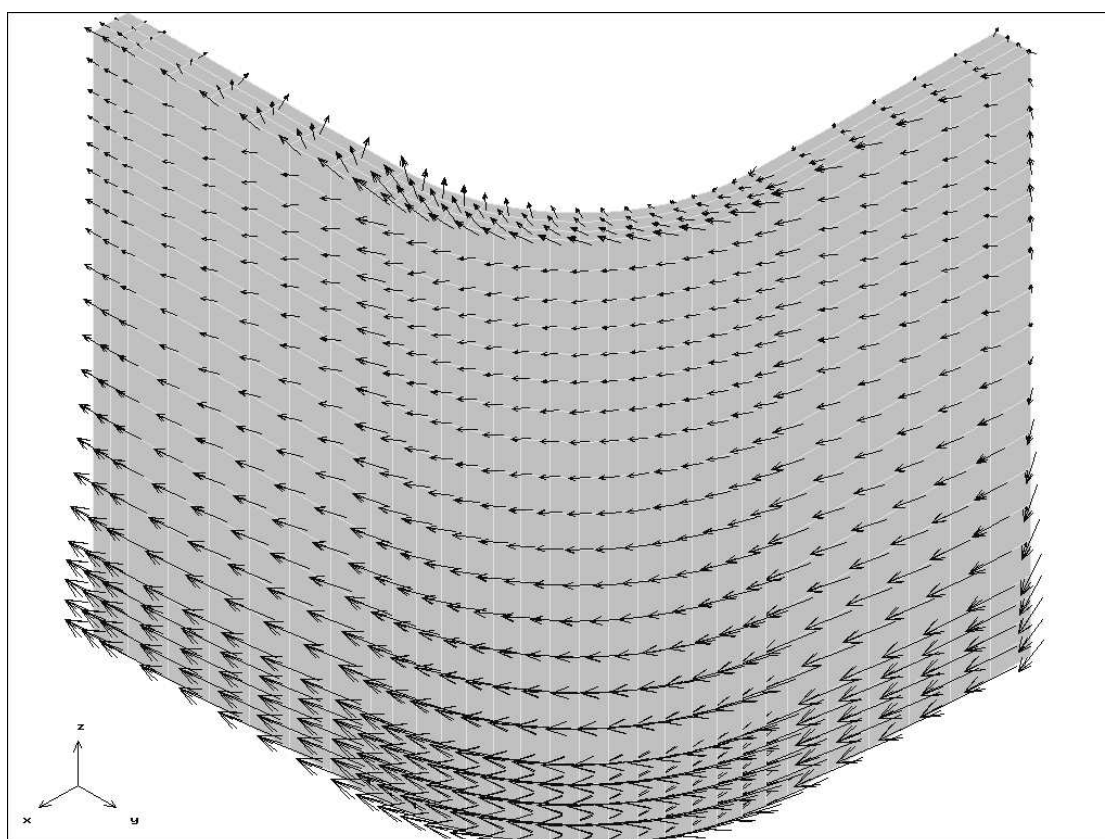


Bild A3.10 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_{4n}

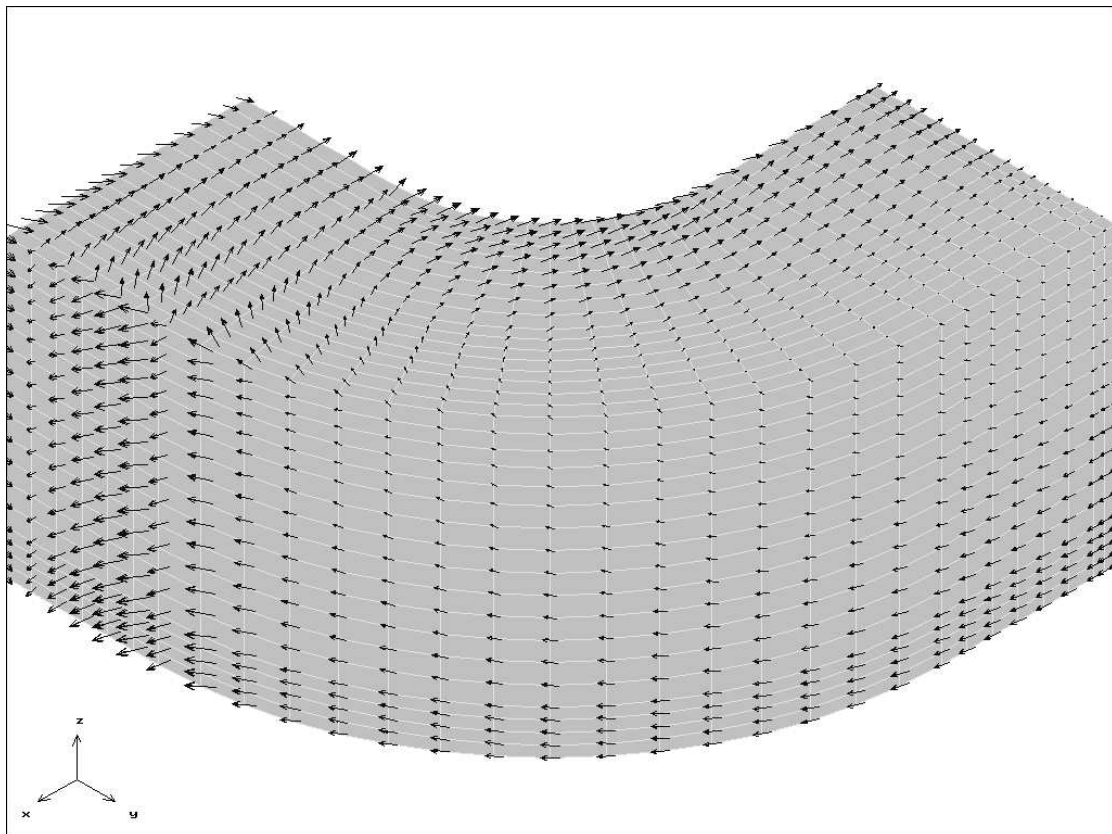


Bild A3.11 Realteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_{4n}

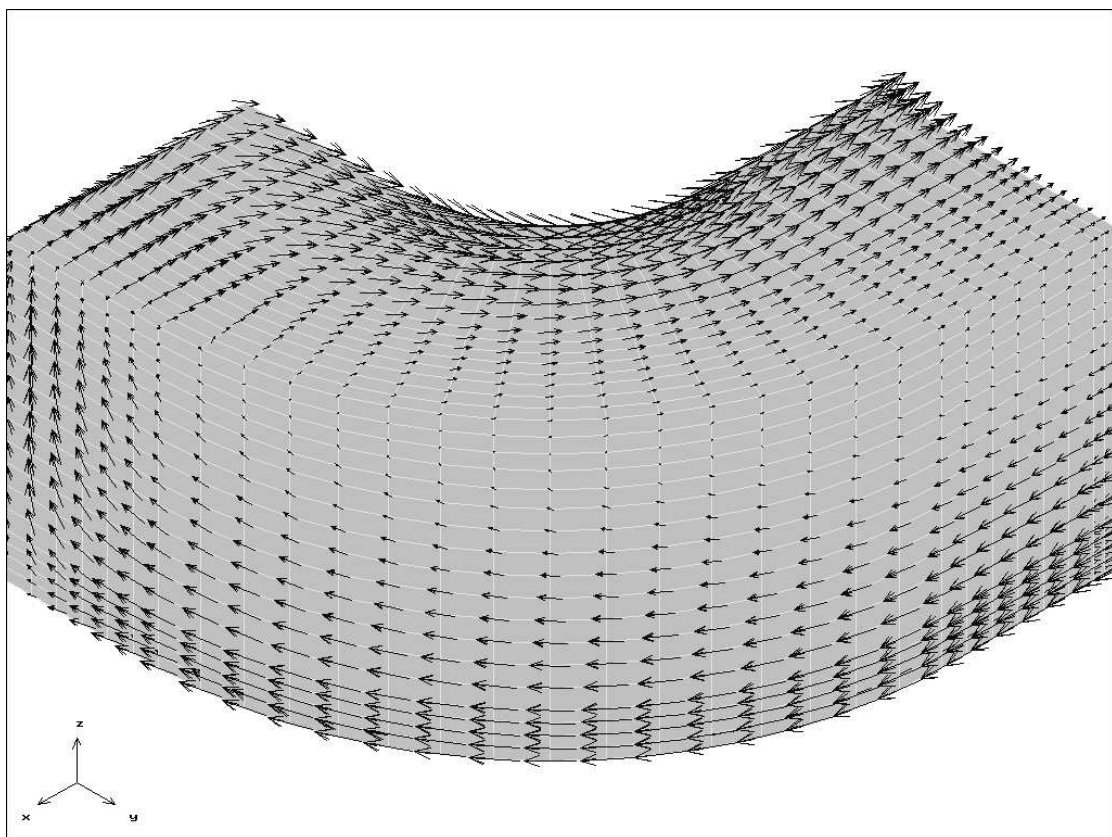


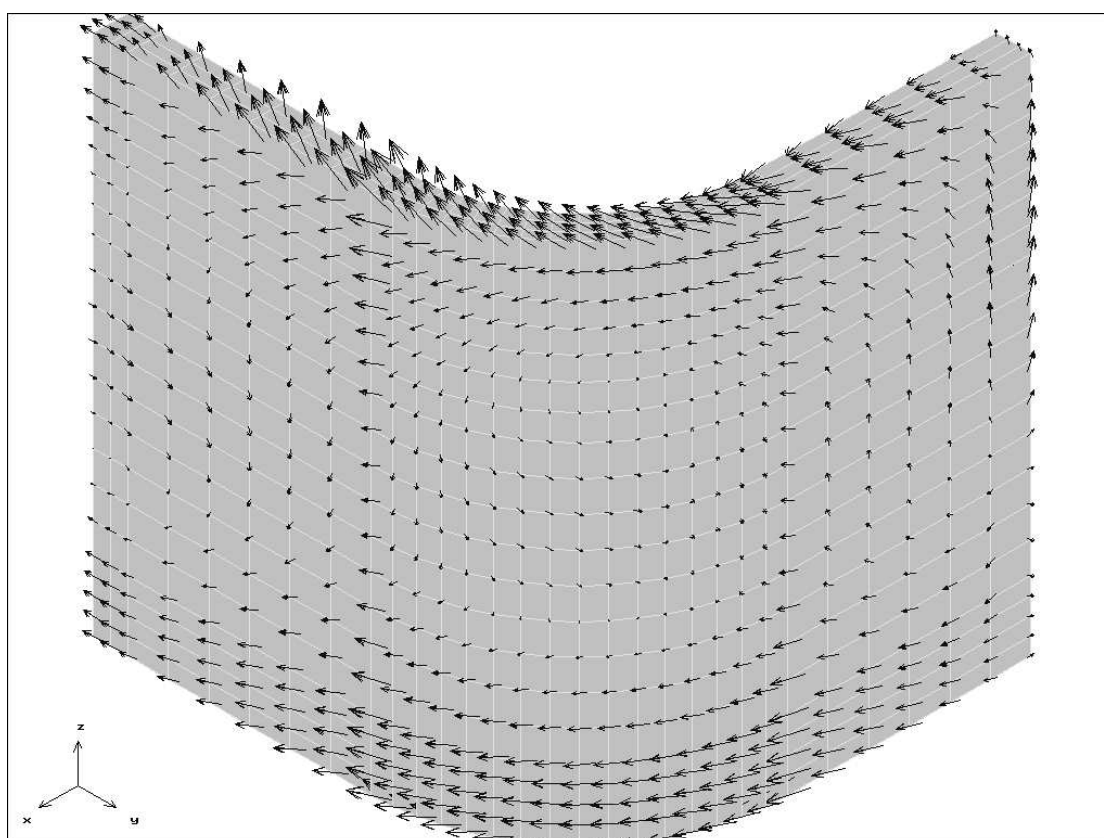
Bild A3.12 Imaginärteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche, $s = 523$ mm
Variante S_{4n}

3. Varianten mit Änderung der relativen Permeabilität

VAR	μ_r	P _{Rin} in kW	P _{Km} in kW	P _{Geh} in kW	P _{Ges} in kW	P _{Kl} in kW
M1	500	95,983	2,332	1,760	100,075	96,182
M2	1000	99,313	2,364	1,805	103,482	99,629
M3	10 000	102,513	2,400	1,848	106,761	102,952
M4	100 000	102,845	2,404	1,852	107,101	103,297

Tabelle A3.10 Berechnete Wirkleistungen in Abhängigkeit von der Permeabilität μ_r

μ_r	Q _{Ind} in kVar	Q _{Rin} in kVar	Q _{Luft} in kVar	Q _{ML} in kVar	Q _{Km} in kVar	Q _{Geh} in kVar	Q _{Ges} in kVar	Q _{KL} in kVar
500	2,498	11,783	85,125	6,631	7,497	2,316	115,850	124,575
1000	2,529	12,171	86,960	3,544	7,636	2,374	115,214	124,106
10 000	2,557	12,542	88,795	0,380	7,768	2,435	114,477	123,465
100 000	2,560	12,581	88,992	0,038	7,781	2,442	114,394	123,396

Tabelle A3.11 Berechnete Blindleistungen in Abhängigkeit von der Permeabilität μ_r Bild A3.13 Realteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, $\mu_r=500$
Variante M1

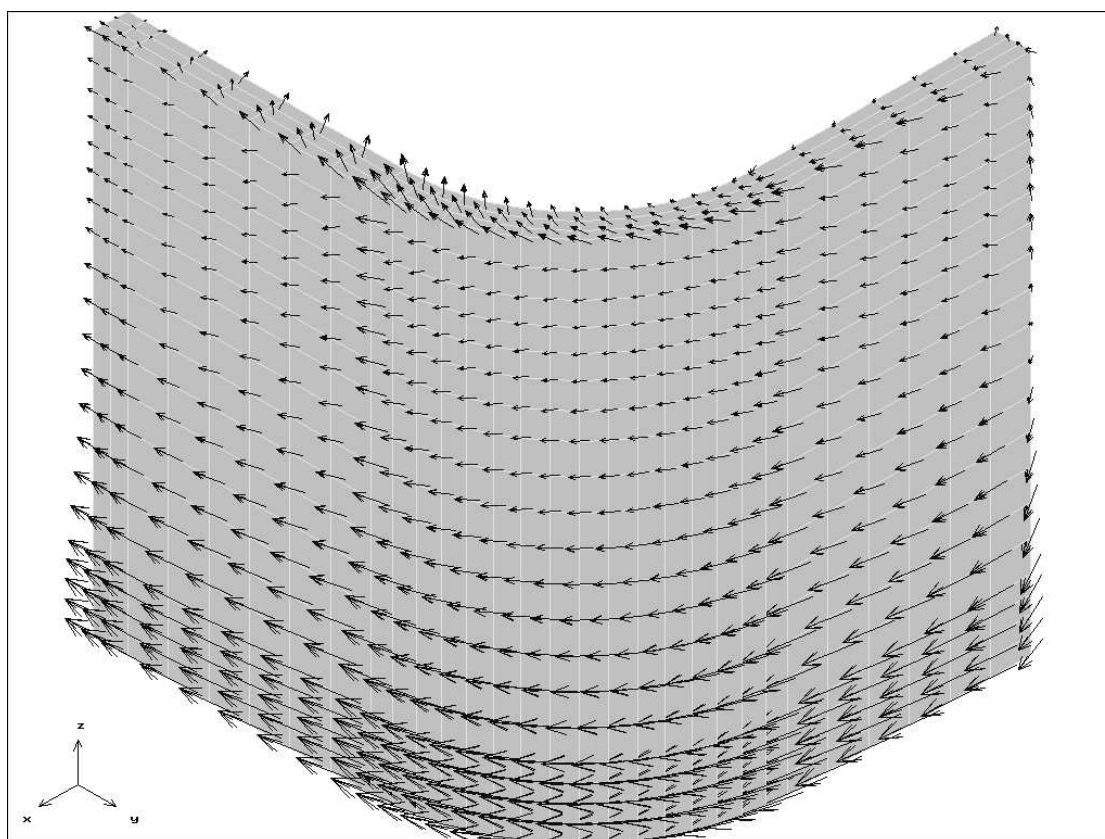


Bild A3.14 Imaginärteil der Stromdichte auf der Kühlzylinderoberfläche, $\mu_e 500$
Variante M1

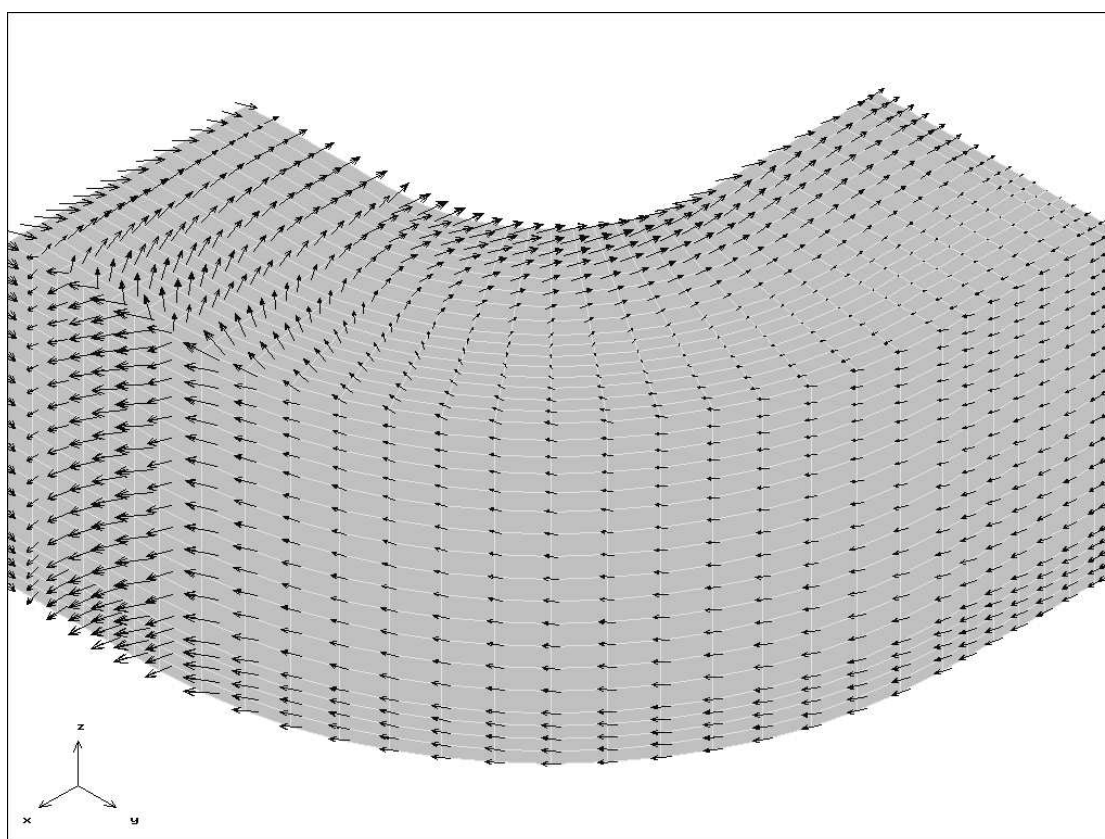


Bild A3.15 Realteil der Stromdichte auf der Gehäuseoberfläche, $\mu_e 500$
Variante M1

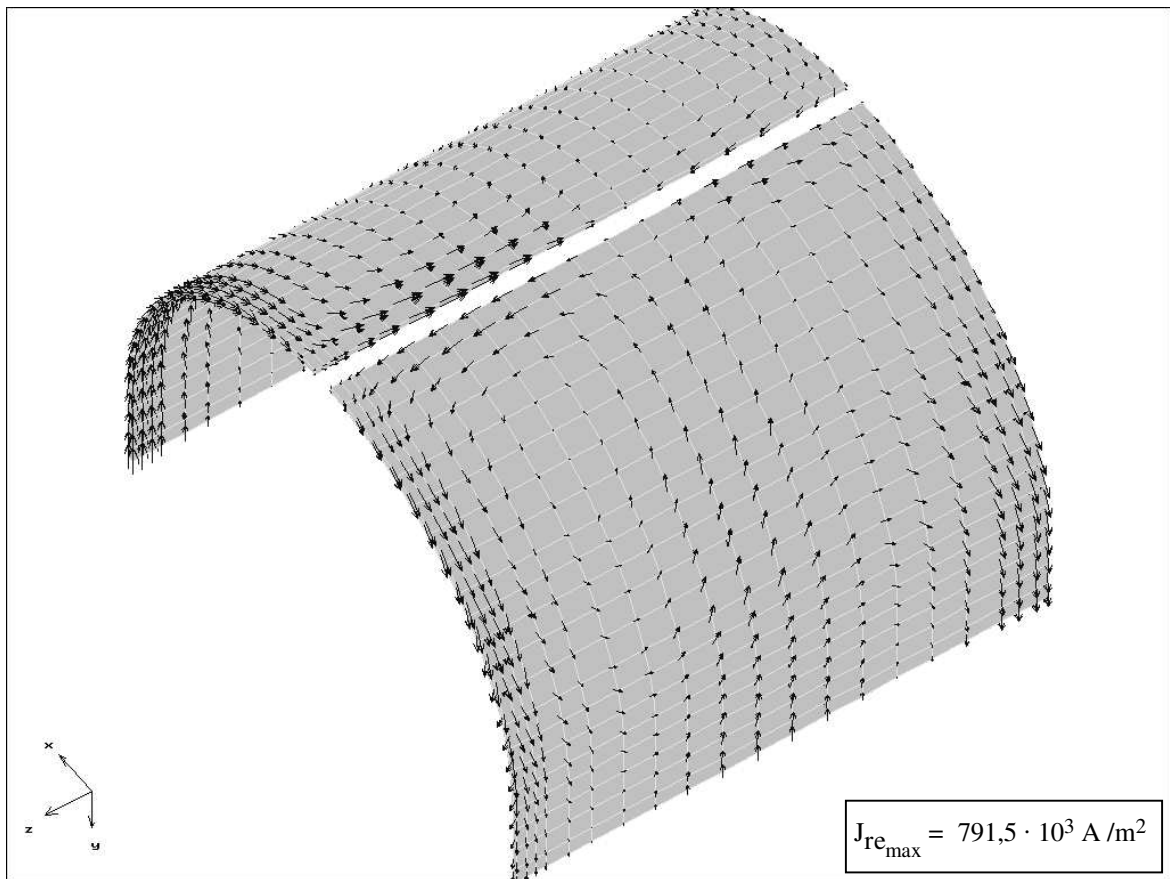


Bild A4.1 Realteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders, Variante 1

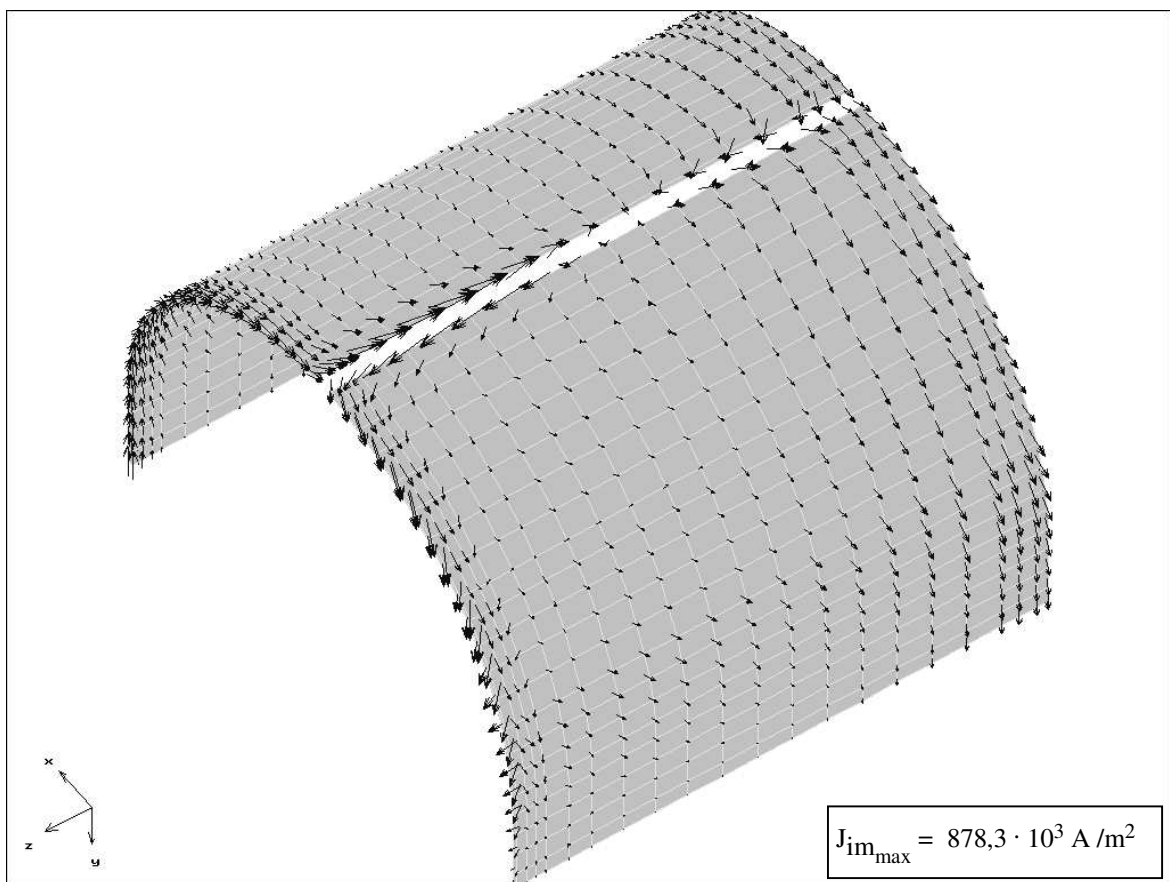


Bild A4.2 Imaginärteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders, Variante 1

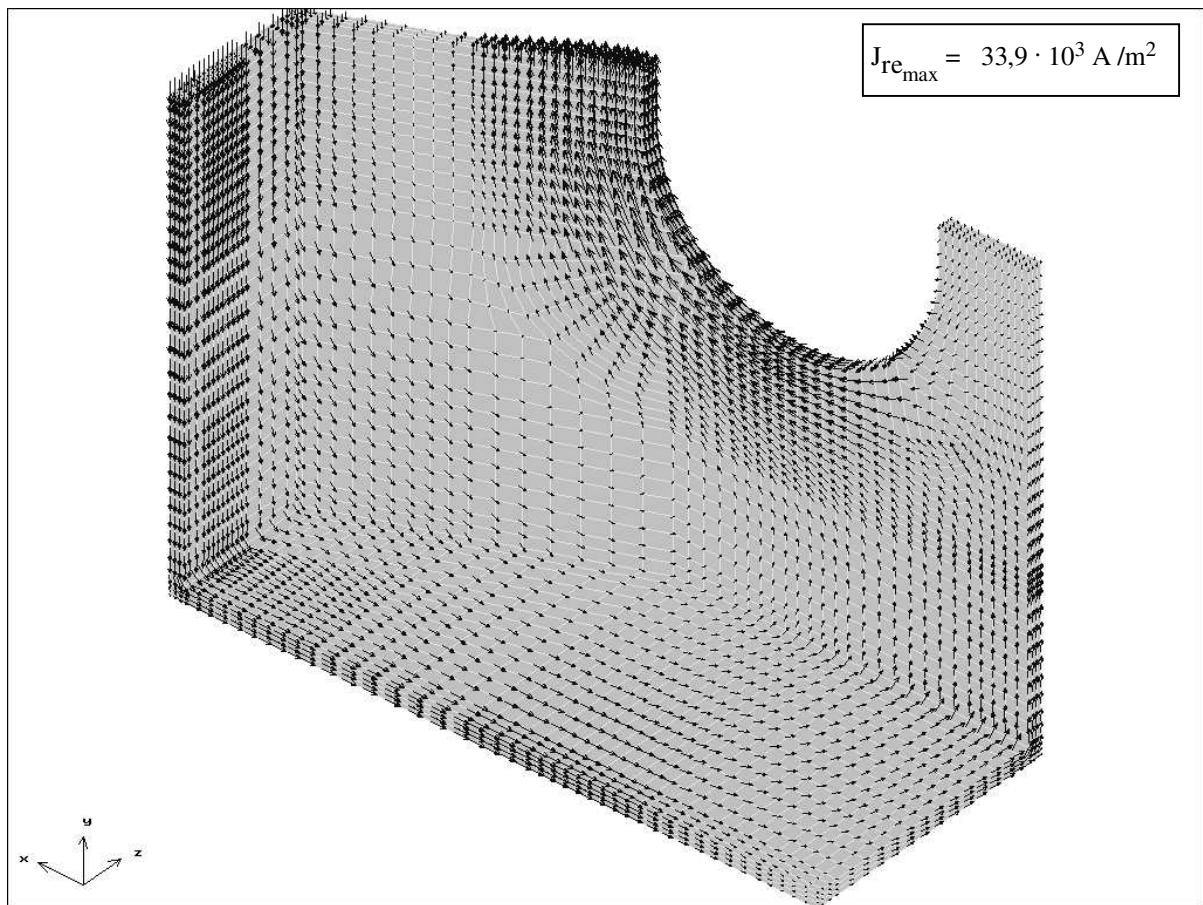


Bild A4.3 Realteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Ofengehäuse, Variante 1

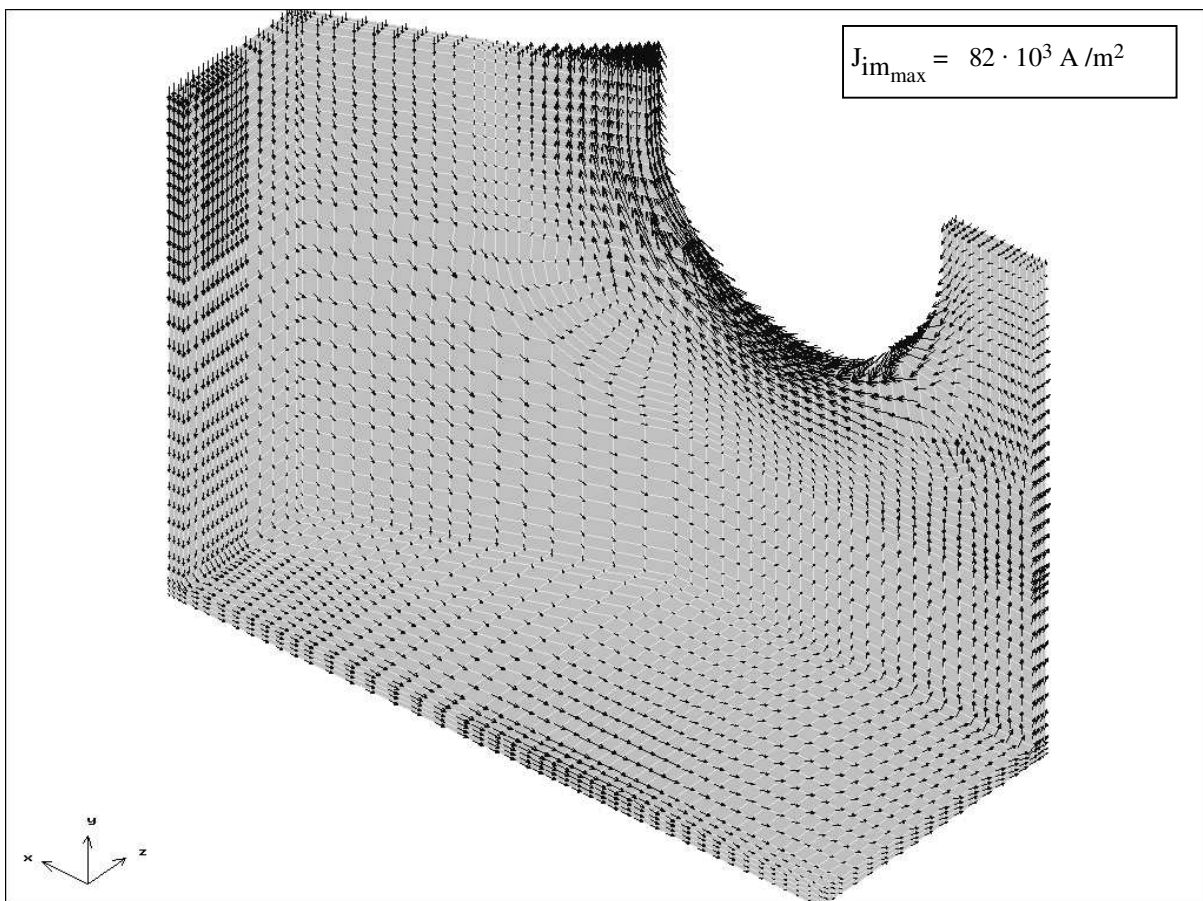


Bild A4.4 Imaginärteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Ofengehäuse, Variante 1

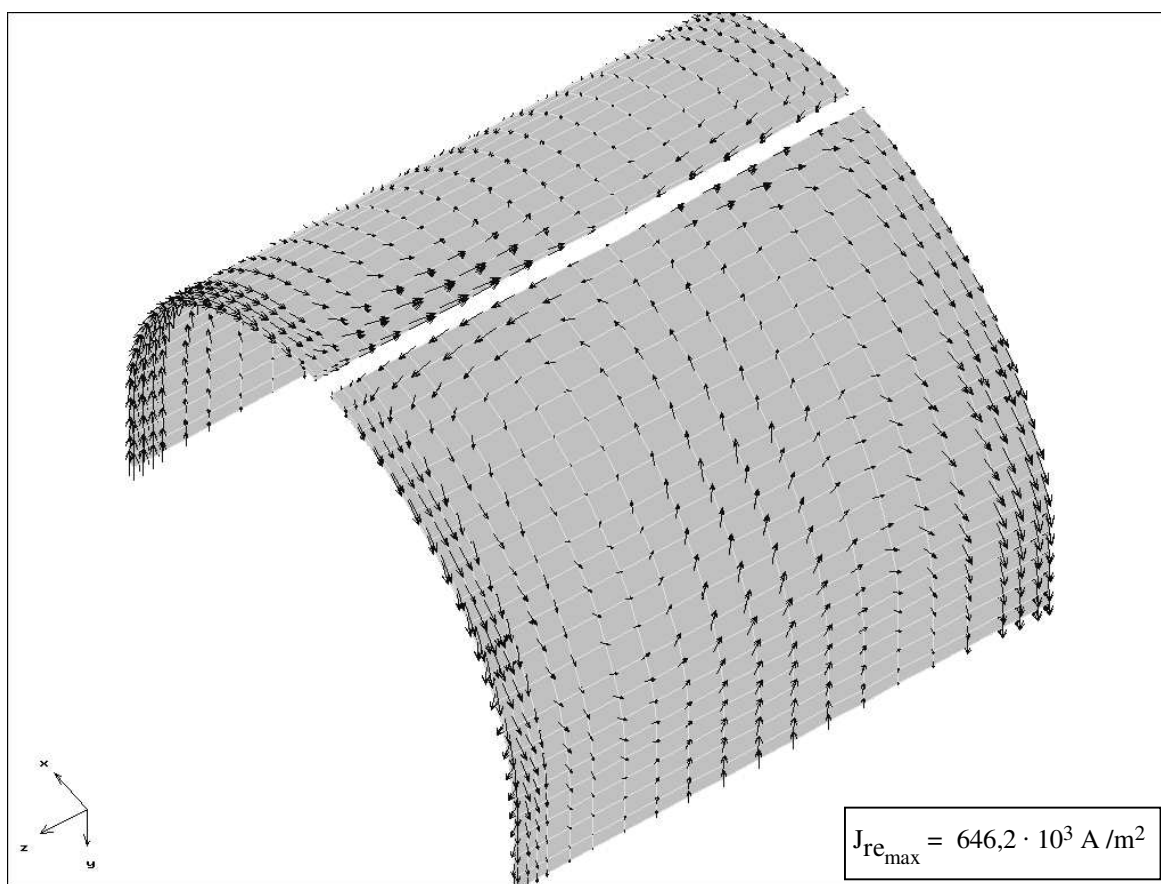


Bild A4.5 Realteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders, Variante 2

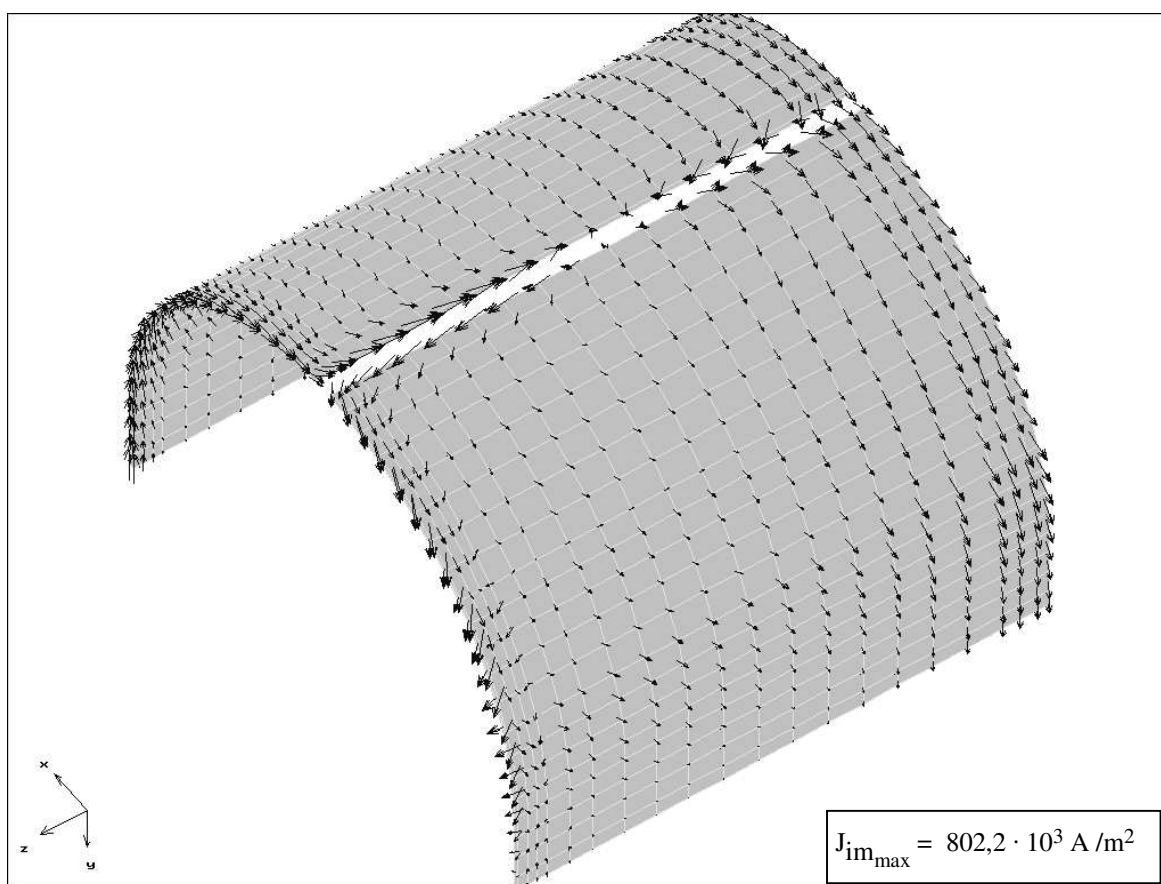


Bild A4.6 Imaginärteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders, Variante 2

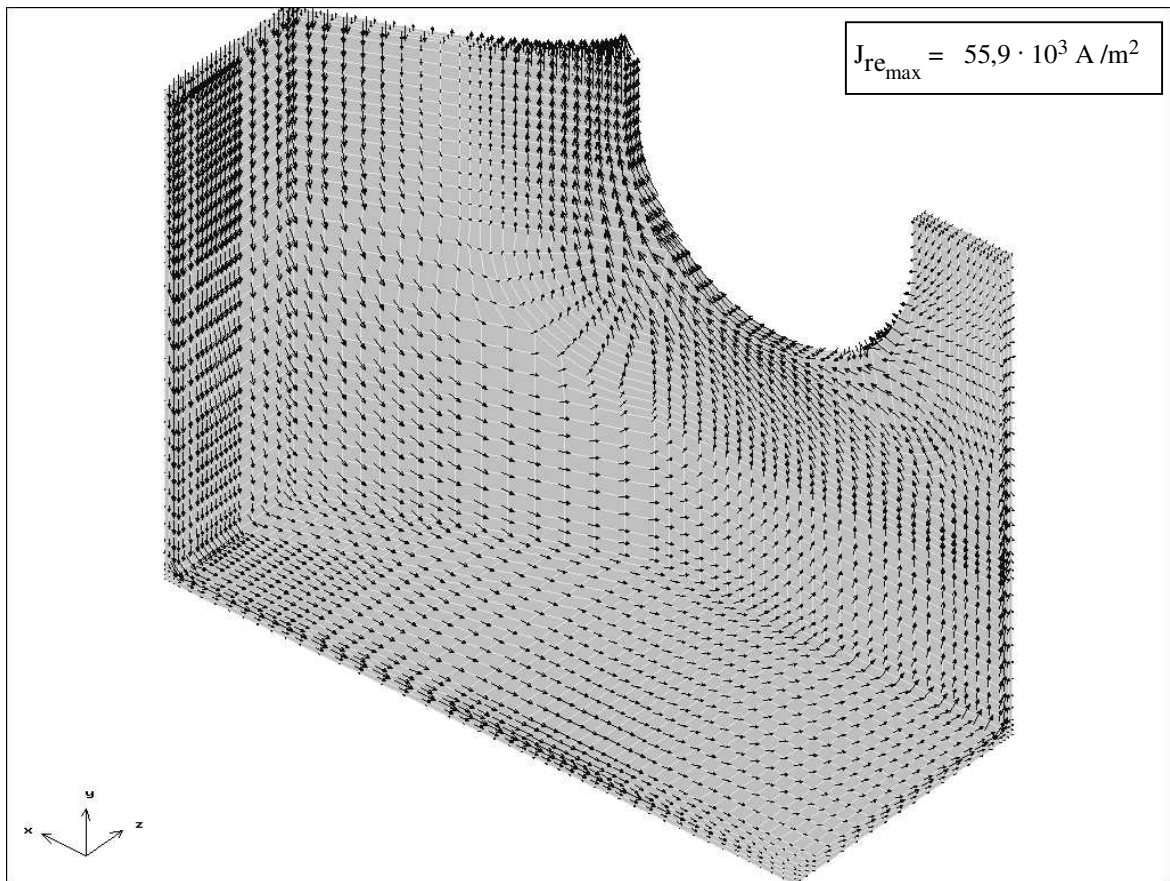


Bild A4.7 Realteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Ofengehäuse, Variante 2

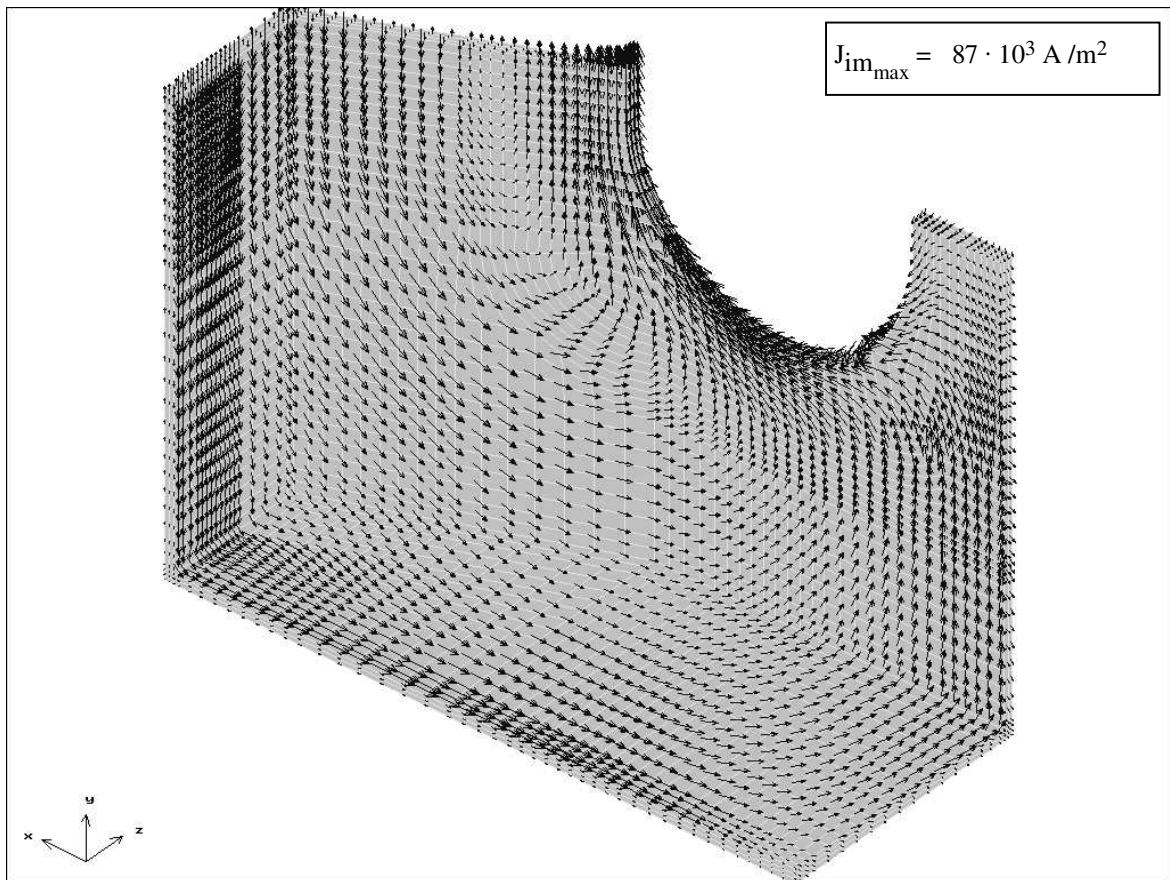


Bild A4.8 Imaginärteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Ofengehäuse, Variante 2

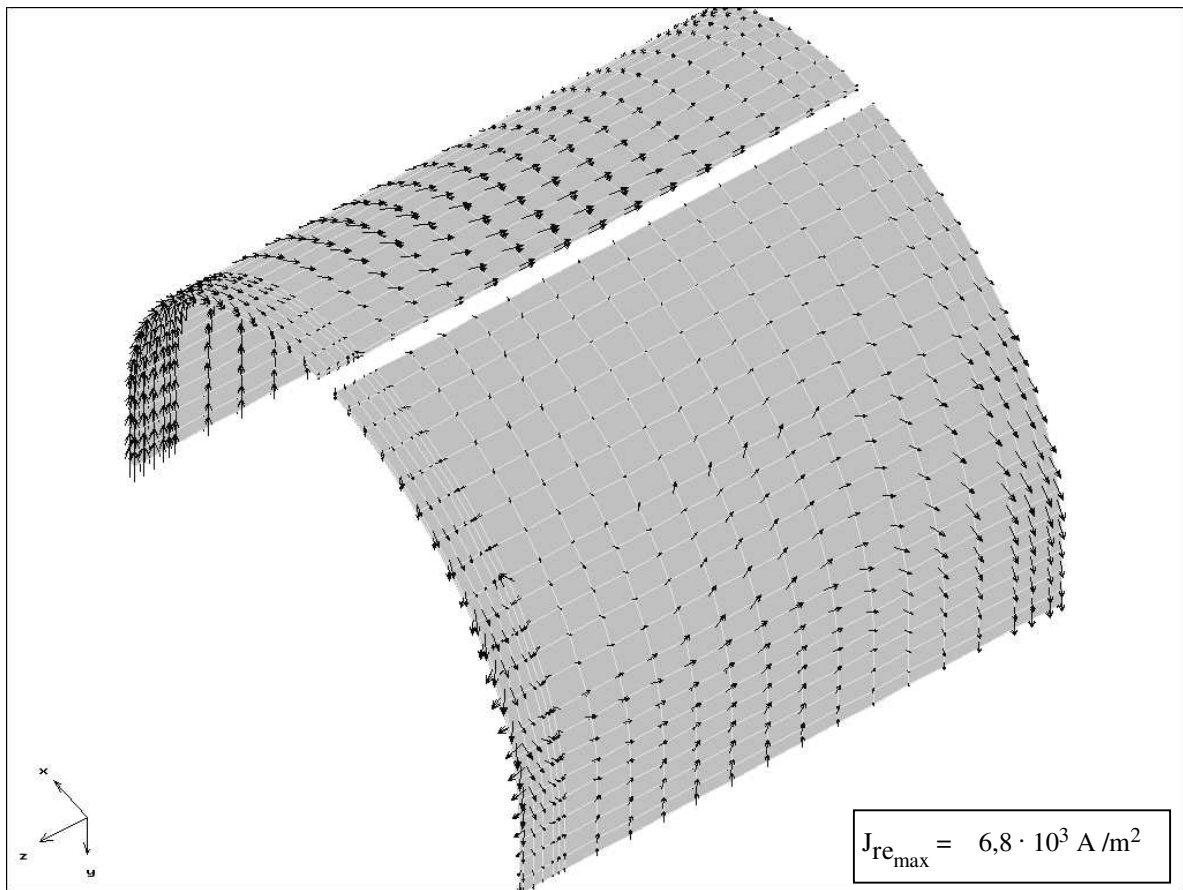


Bild A4.9 Realteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders, Variante 4

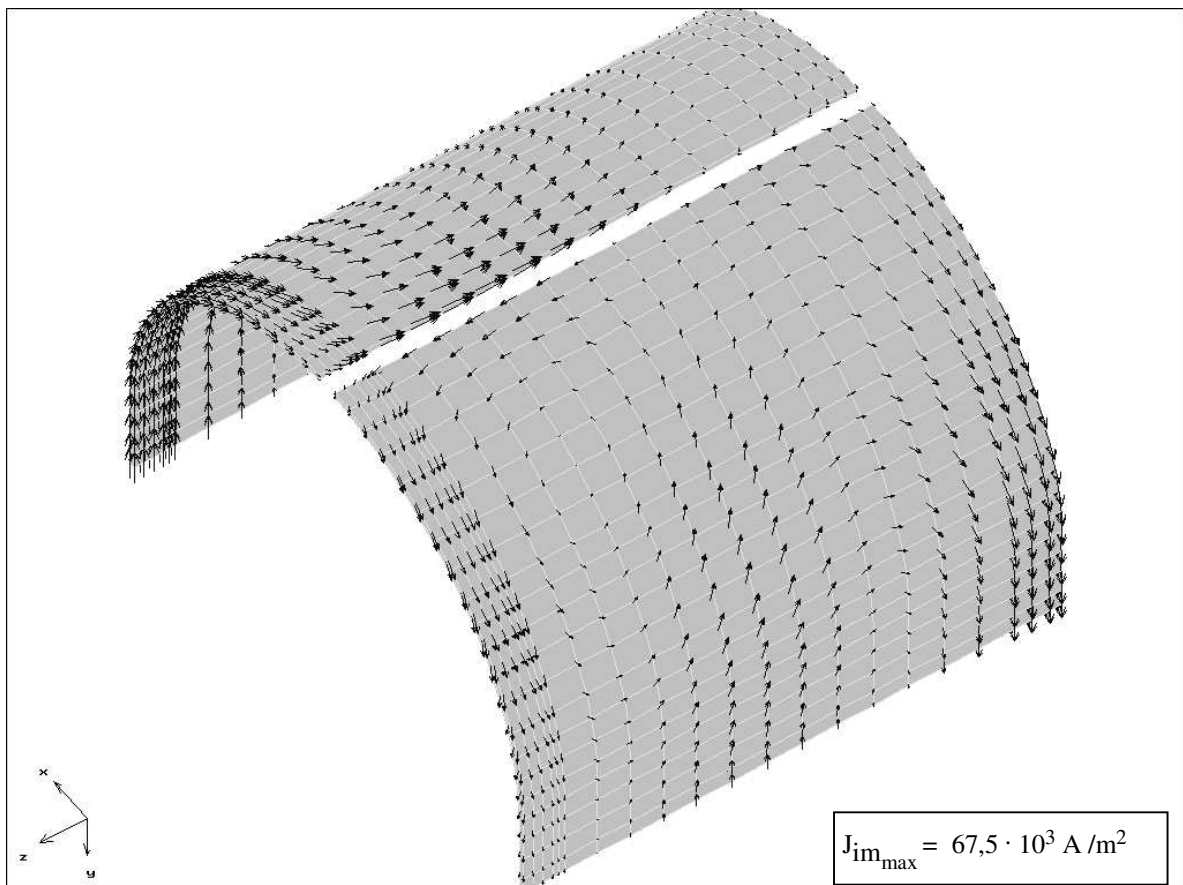


Bild A4.10 Imaginärteil der Stromdichte auf der Außenfläche des Kühlzylinders, Variante 4

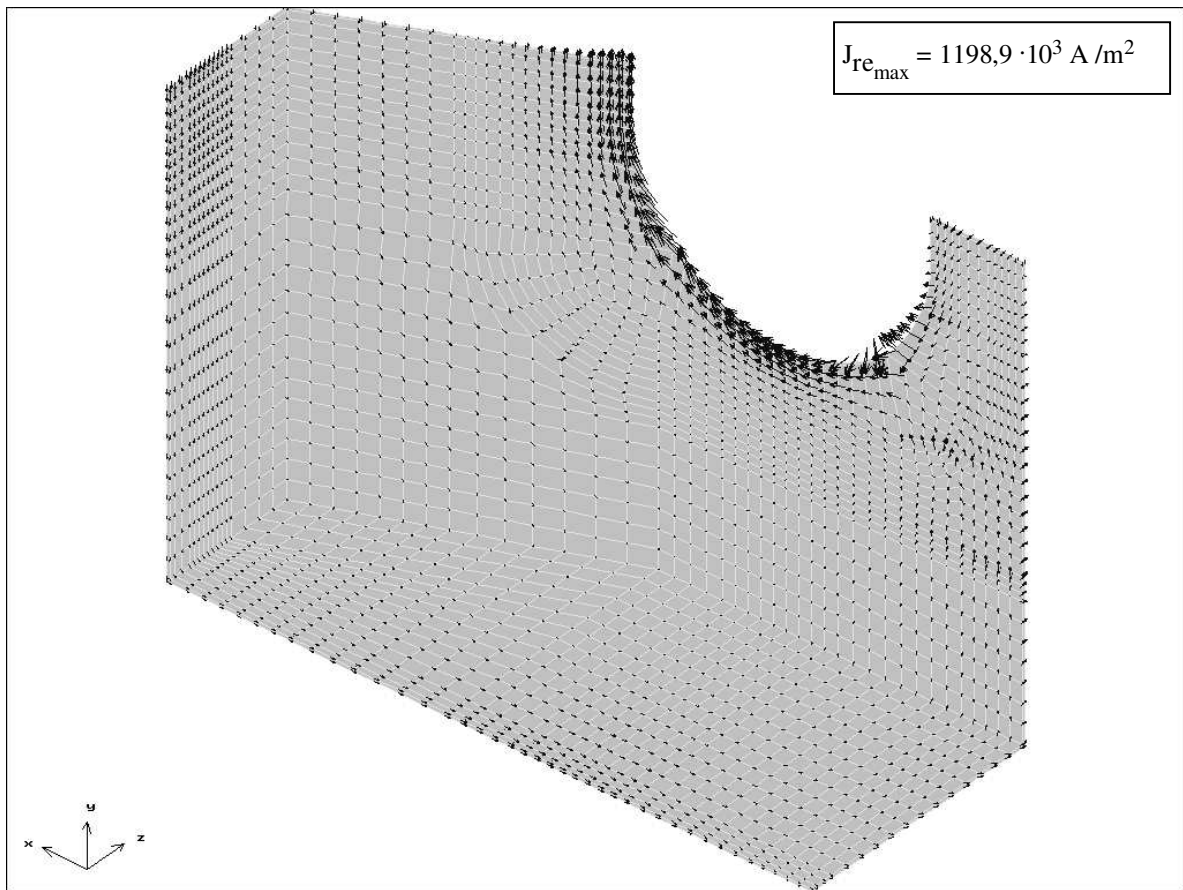


Bild A4.11 Realteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Kupfergehäuse, Variante 4

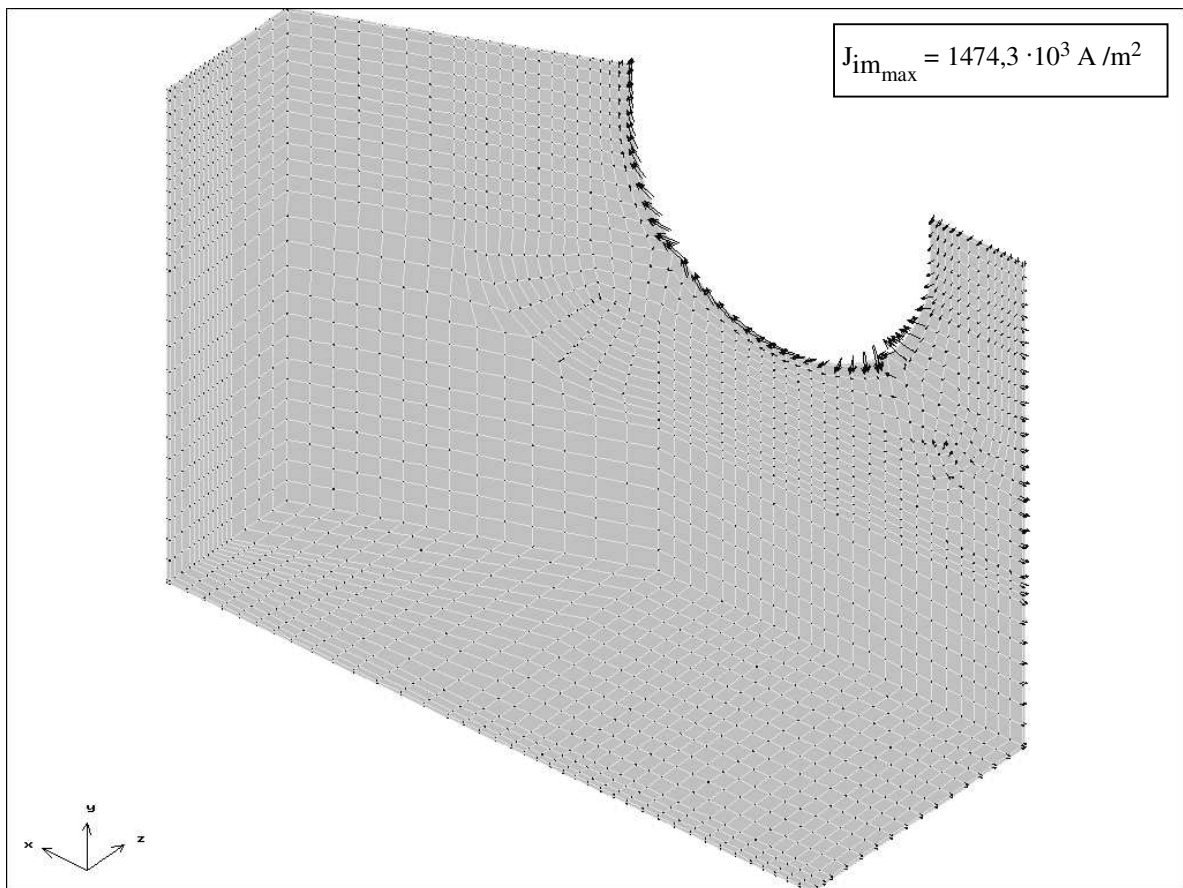


Bild A4.12 Imaginärteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Kupfergehäuse, Variante 4

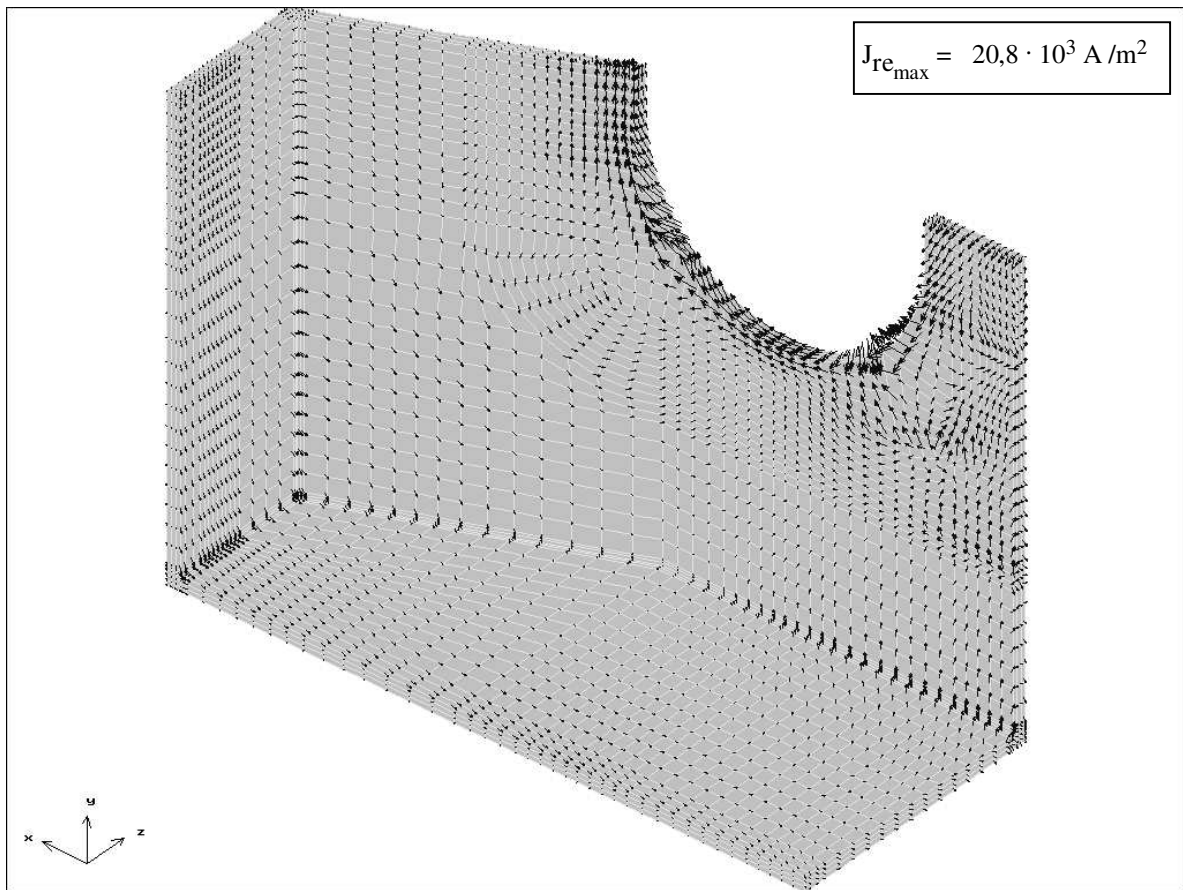


Bild A4.13 Realteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Stahlgehäuse, Variante 4

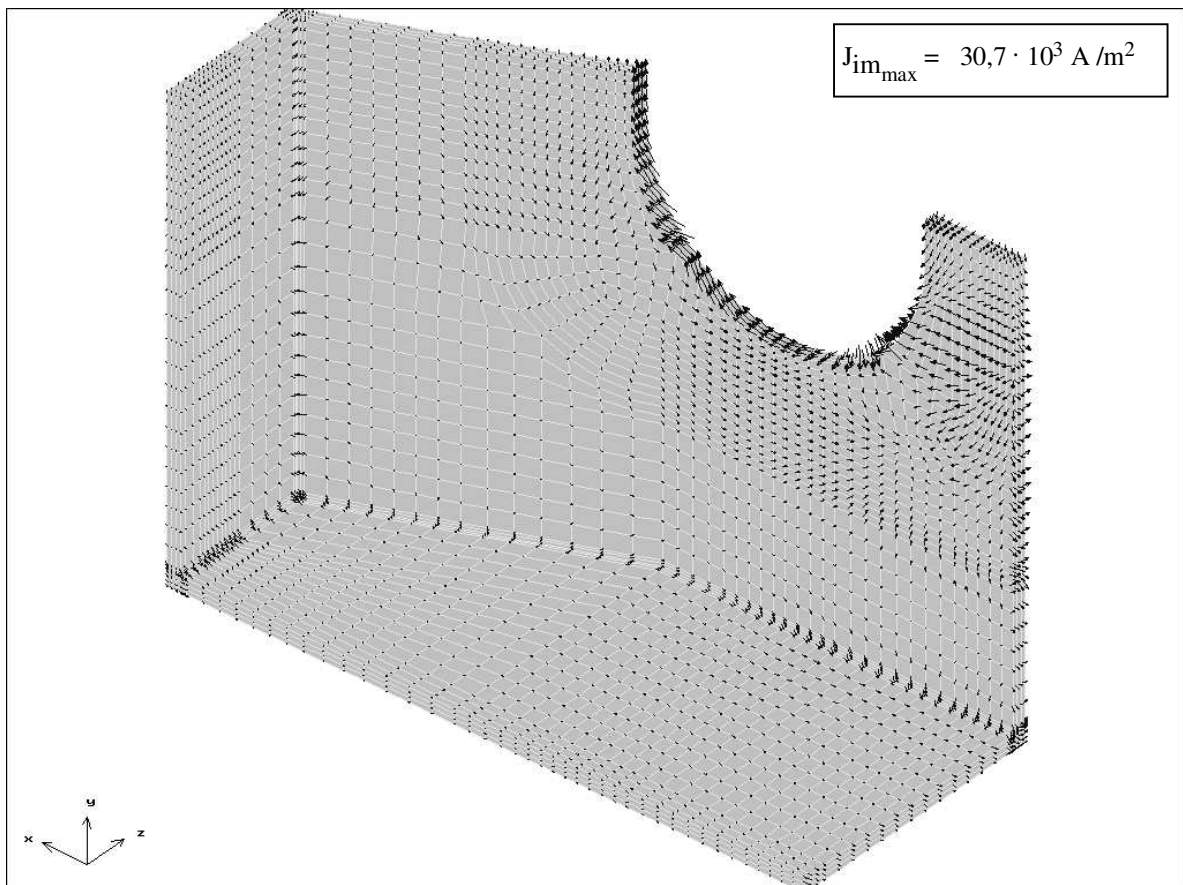


Bild A4.14 Imaginärteil der Stromdichte auf der Innenfläche vom Stahlgehäuse, Variante 4

Bestimmung der thermischen Verluste für Kühlmantel und Gehäuse

Trafostufe	U [V]	U ² [V ²]	Pvkm [kW]	Pvgeh [kW]	Pvges [kW]
2	1085	1177225	49.29	74.56	123.85
3	1225	1500625	55.78	79.42	135.2
4	1345	1809025	65.48	93.2	158.68
6	1450	2102500	67.38	98.93	166.31
7	1500	2250000	73.28	108.97	182.25

Tabelle A4.1 Gemessene Gesamtverluste $P_v = P_{el} + P_{th}$

Trafostufe	U [V]	U ² [V ²]	Pvkm [kW]	Pvgeh [kW]	Pvges [kW]
2	1085	1177225	25.23	39.40	64.62
3	1225	1500625	31.72	44.26	75.97
4	1345	1809025	41.42	58.04	99.45
6	1450	2102500	43.32	63.77	107.08
7	1500	2250000	49.22	73.81	123.02

Tabelle A4.2 Berechnete elektrische Verluste P_{el}

Verwendete Formelzeichen und Symbole

\vec{A}	magnetisches Vektorpotential	Vs / m
\vec{A}_r	resultierendes Vektorpotential	Vs / m
A	Fläche	m ²
\vec{B}	magnetische Induktion	Vs / m ²
\vec{D}	elektrische Verschiebungsflußdichte	As / m ²
\vec{E}	elektrische Feldstärke	V / m
f	Frequenz	Hz = 1/ s
\vec{H}	magnetische Feldstärke	A / m
I	Stromstärke	A
\vec{J}	Stromdichte	A / m ²
\vec{J}_0	am Induktor eingeprägte Stromdichte	A / m ²
j	imaginäre Einheit	$j = \sqrt{-1}$
N	Formfunktion	
P	Wirkleistung	W
p_i	i-te Suchrichtung (beim ICGG-Verfahren)	
Q	Blindleistung	VA
R_1, R_2	Residuen (Rest)	
r_i	i-ter Rest (beim ICGG-Verfahren)	
S	Scheinleistung	VA
\vec{S}_p	Pointingvektor	W / m ²
V	Volumen	m ³
W	Windungszahl	
x_i	i-te Lösung	
φ	skalares Potential	V
Γ	Ebenes Gebiet	m ²
Γ_e	Hüllfläche	m ²
$\vec{\Gamma}_e, \vec{\Gamma}_{oe}$	Oberflächenvektor	
κ	elektrische Leitfähigkeit	S / m = 1/ (Ω m)
ω	Kreisfrequenz , $\omega = 2\pi f$	s ⁻¹
Ω	räumliches Gebiet	m ³
μ	Permeabilität	H / m
μ_r	relative Permeabilität	
Ψ	magnetisches Potential	A

Feldoperatoren und Vektoroperationen

div	Divergenz eines Vektorfeldes
grad	Gradient eines skalaren Feldes

rot	Rotation eines Vektorfeldes
Δ	Laplace- Operator
\times	Kreuzprodukt
\bullet	Skalarprodukt

Indizes

i, j	Summationsindizes
i	Iterationszahl
e	im finiten Element
ge	im Teilgebiet
0	eingepägt, am Induktor
p, q	am Knotenpunkt p, q
n, t	Normal- bzw. Tangentialkomponente
o	Index für Anfangs-
R_{in}	in der Rinne
K_m	im Kühlmantel
G_{eh}	im Induktorgehäuse
G_{es}	Gesamt
K_l	an den Induktorklemmen

Integrale und Differentiale


$\oint_C dC$	Umlaufintegral über Weg C
$\oint_A dA$	Oberflächenintegral über Oberfläche A
$\int_A dA$	Flächenintegral über Fläche A
$\int_V dV$	Integral über das Volumen V
$\partial / \partial n$	partielle Ableitung in Normalenrichtung

Sonstige

$[U]$	Matrix U
$\{V\}, \{W\}$	Vektoren V und W
$\sum_{i=1}^n$	Summation von $i = 1$ bis n
\vec{n}	Normalenvektor

Erklärung der eigenständigen Anfertigung einer Dissertationsschrift

Hiermit versichere ich, daß ich die Dissertationsschrift mit dem Titel : „Zur numerischen Berechnung von Wirbelstromverlusten in Konstruktionselementen von Induktionsöfen“ vollständig eigenständig angefertigt habe. Alle verwendeten Hilfsmittel und Quellen wurden von mir im Schrifttum der Arbeit angegeben.


Wolfgang Weigel

Ilmenau, den 27.11.00